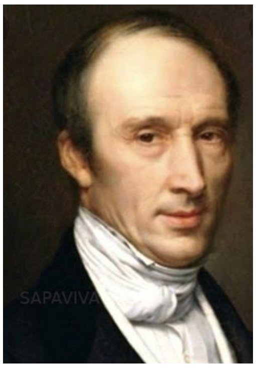
République Démocratique du Congo
Enseignement Supérieur et Universitaire

Université Officielle de Bukavu

Cours d'Analyse Infinitésimale

Prof. Dr. **Zihindula Biguru Lucien**

A l'attention des étudiants de première année d'université (tous parcours)
Domaine de Sciences et Technologies.



Augustin Louis **CAUCHY**
1789-1857

Année académique 2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels et suites

1.1 Ensemble $\mathbb{N}$ et raisonnement par récurrence

1.1.1 Rappel

Rappel 1 *:*
*Nous savons qu'une opération $\star$ est appelée **loi de composition interne** dans un ensemble non vide E si :*

$$\forall \quad a, b \in E \quad \text{on a :} \quad a \star b \in E$$

*En d'autres termes, $\star : E \times E \longrightarrow E$ est une application associant à tout élément $(a, b) \in E \times E$ l'élément $a \star b \in E$. On dit dans ce cas que le couple $(E, \star)$ est un **magma**[1].*

*Un magma $(E, \star)$ est appelé **groupe** si et seulement si :*

1. *la loi $\star$ est **associative** : $\forall a, b, c \in E$ on a*
$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$
2. *la loi $\star$ **admet un élément neutre unique** e : il existe un et un seul élément $e \in E$ tel que $\forall a \in E$ on a*
$$a \star e = e \star a = a$$
3. *chaque élément a de E possède un élément symétrique $a^{'}$ unique :*
$$\forall a \in E \quad \exists a^{'} \in E : \quad a \star a^{'} = a^{'} \star a = e$$

*Si $(E, \star)$ est un groupe et qu'en plus la loi $\star$ est commutative, c'est à dire $a \star b = b \star a \quad \forall (a, b) \in E \times E$ alors on dit que $(E, \star)$ est un **groupe commutatif** ou encore **groupe abélien**[2].*

Définition 1 (Relation d'ordre total) *:*
considérons $\mathcal{R}$ une relation définie sur un ensemble non vide E i.e. $\mathcal{R}$ est une partie du produit cartésien $E \times E$.
On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si :

1. Rien à voir avec ces roches volcaniques ...
2. En hommage au mathématicien norvégien **Niels Henrik ABEL** né le 5 août 1802 et mort le 6 avril 1829

1. *$\mathcal{R}$ est réflexive i.e. $\forall x \in E$ on a $x\mathcal{R}x$;*

2. *$\mathcal{R}$ est antisymétrique i.e. $\forall x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$;*

3. *$\mathcal{R}$ est transitive i.e. $\forall x, y, z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.*

Définition 2 *:*
Considérons $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E.
On dit que $\mathcal{R}$ est un ordre total sur E, ou encore que l'ensemble E est totalement ordonné par la relation $\mathcal{R}$, si $\forall x, y \in E$ on a soit $x\mathcal{R}y$ ou alors $y\mathcal{R}x$.

Remarque 1 *:*
De manière générale on note par $\leq$ toute relation d'ordre dans un ensemble donné.

Définition 3 (majorants, minorants, ...) *:*
Considérons A une partie non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$.

1. *on dit qu'un élément $M \in E$ est un **majorant** de A si $\forall x \in A$ on a $x \leq M$;*

2. *on dit qu'un élément $m \in E$ est un **minorant** de A si $\forall x \in A$ on a $m \leq x$;*

3. *on dit qu'un élément $y \in E$ est un **plus grand élément** de A si y est un majorant de A et $y \in A$;*

4. *on dit qu'un élément $y \in E$ est un **plus petit élément** de A si y est un minorant de A et $y \in A$;*

5. *on dit qu'un élément $b \in E$ est une **borne supérieure** de A si b est un plus petit élément de l'ensemble des majorants de A ;*

6. *on dit qu'un élément $b \in E$ est une **borne inférieure** de A si b est un plus grand élément de l'ensemble des minorants de A ;*

Remarque 2 (Unicité du plus petit élément) *:*
si $(E, \leq)$ est totalement ordonné et qu'un sous-ensemble A de E possède un plus petit élément, alors ce dernier est unique et on le note $\min(A)$.
Il en résulte que si l'ordre $\leq$ est total alors la borne supérieure de toute partie $A \subset E$ est également unique en tant que plus petit élément de l'ensemble des majorants. Dans ce cas on la note $\sup(A)$.

En guise de justification, supposons que A admette deux plus petits éléments x et y.

— comme x est un plus petit élément de A et $y \in A$ on a $x \leq y \quad (*)$;

— comme y est un plus petit élément de A et $x \in A$ on a $y \leq x \quad (**)$;

— comme l'ordre est total alors $(*)$ et $(**)$ entrainent que $x = y$

De manière générale la borne supérieure d'un ensemble $A \subset E$ peut ne pas appartenir à A. Cependant, il existe dans ce cas , des éléments de A qui s'approchent de cette borne autant que possible.

Plus précisément :

Proposition 1 *:*
Considérons $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
Si α est la borne supérieure d'un sous -ensemble non vide $A \subset E$ alors $\forall x \in E$ avec $x < \alpha$, il existe y dans A tel que $x < y \leq \alpha$

En effet, soit $x \in E$ tel que $x < \alpha$.
S'il n'existe pas d'éléments $y \in A$ tel que $x < y$ alors x est un majorant de A qui est en plus strictement plus petit que la borne supérieure de A. Ce qui est contradictoire. Il existe donc $y \in A$ tel que $x < y$.
Comme en plus α est majorant de A, alors $y \leq \alpha$ ■

1.1.2 Entiers naturels

Rappelons que l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.
Il est largement suffisant pour compter les éléments d'un ensemble dénombrable.

L'addition ordinaire est une loi de composition interne dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels car

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad (a + b) \in \mathbb{N}$$

Cette loi de composition interne possède les propriétés suivantes :

1. **Associativité :**

   $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
2. **0 est l'élément neutre :**

   $\forall a \in \mathbb{N}, \quad a + 0 = 0 + a = a$
3. La structure $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe étant donné que seul l'élément neutre $(0 \in \mathbb{N})$ admet son opposé dans $\mathbb{N}$.
4. Notons enfin que l'addition dans $\mathbb{N}$ est commutative car :

   $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad a + b = b + a$

Définition 4 *:*
Si a et b sont deux entiers naturels tels que $b = a + 1$, on dit que b est le ***successeur*** *de a. Dans ce cas a est le* ***prédécesseur*** *de b.*

Remarquons que dans $\mathbb{N}$ chaque élément possède un successeur ($\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément) mais seul l'élément 0 n'a pas de prédécesseur.

1.1.3 Relation d'ordre dans $\mathbb{N}$ et Raisonnement par récurrence

Considérons la relation $\leq$ définie dans $\mathbb{N}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ par :$m \leq n$ s'il existe un entier naturel k tel que $m + k = n$.

Proposition 2 *:*
$(\mathbb{N}, \leq)$ *est totalement ordonné.*

Exercice 1 *:*
Démontrer que $(\mathbb{N}, \leq)$ *est totalement ordonné.*

L'ensemble $\mathbb{N}$ possède un certain nombre d'intéressantes propriétés parmi lesquelles nous admettons la proposition suivante (très intuitive) :

Proposition 3 *:*
Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ *admet un plus petit élément.*

Proposition 4 *:*
$\mathbb{N}$ *n'admet pas de plus grand élément mais toute partie non vide majorée de* $\mathbb{N}$ *admet un plus grand élément.*

Proposition 5 (Base de la récurrence) *:*
Si A est une partie non vide de l'ensemble $\mathbb{N}$ tel que $0 \in A$ et chaque élément de A possède son successeur dans A alors $A = \mathbb{N}$.

Cette propriété, quoique trop intuitive pour qu'il faille la démontrer, possède une importante implication logique connue sous l'appellation **raisonnement par récurrence**.
Il s'agit d'un raisonnement mathématique permettant de prouver qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un nombre entier naturel n est valable (ou pas) pour tous les entiers naturels.

La mise en oeuvre du raisonnement par récurrence comporte généralement deux étapes :

1. **Conditions initiales :**

   cette étape consiste à vérifier si 0 appartient à l'ensemble $A \subset \mathbb{N}$ des entiers naturels pour lesquels la propriété $P(n)$ est vraie.
   Concrètement, en plus de vérifier si la propriété est vraie pour $0 \in A$, on soutient généralement l'intuition en vérifiant la propriété pour quelques successeurs successifs de 0 (1,2,3,...).
   Il arrive même que la propriété ne concerne que des entiers non nuls, cas dans lequel les **conditions initiales** commencent par 1. Plus exactement, elles commencent par le plus petit entier n pour lequel la propriété est concernée [3].
2. **Montrer le caractère héréditaire de la propriété** :

   cette étape consiste d'abord à supposer que la propriété est vraie pour **UN** entier n (`hypothèse de récurrence`) et d'en déduire ensuite que la propriété reste vraie pour le successeur $n + 1$ de n.

3. Dans ce cas, on démontre par récurrence qu'une propriété $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ si $P(n_0)$ est vraie et si $P(n+1)$ est vraie dès que l'on suppose que $P(n)$ est vraie.

Au terme de ces deux (trois ?) étapes, on peut conclure que la propriété $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Illustration 1 *:*
Est-il vrai que $\forall n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Résolution et discussion :

1. **Conditions initiales** :

   — si $n = 0$, la propriété est vérifiée car $0 = \frac{0.1}{2}$
   — si $n = 1$, la propriété est vérifiée car $0 + 1 = \frac{1.2}{2}$
   — si $n = 2$, la propriété est vérifiée car $0 + 1 + 2 = \frac{2.3}{2}$
   — si $n = 3$, la propriété est vérifiée car $0 + 1 + 2 + 3 = \frac{3.4}{2}$
   — si $n = 4$, la propriété est vérifiée car $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4.5}{2}$
   — $\vdots$

2. **Hypothèse de récurrence** : admettons que cette propriété soit vraie pour un entier naturel n, c'est-à-dire,

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Montrons alors que cette propriété reste vraie pour $n + 1$:

$$\begin{aligned}
0 + 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= 0 + 1 + 2 + \cdots n + (n+1) \\
&= (0 + 1 + 2 + \cdots n) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2}
\end{aligned}$$

   Comme nous déduisons de l'hypothèse de récurrence que $0 + 1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$, c'est-à-dire, que la propriété reste vraie pour $n+1$ dès que l'on suppose qu'elle est vraie pour n, alors cette propriété est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

   Ainsi par exemple, $0 + 1 + 2 + \cdots + 10000 = \frac{10000 \times 10001}{2} = 50005000$

Remarque 3 (Formulation plus générale du raisonnement par récurrence) *:*

$P(n)$ étant une propriété dépendant d'un entier naturel n et n_0 désignant un entier naturel quelconque, le raisonnement par récurrence permet de montrer en deux étapes que la propriété $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$:

1. *On vérifie que la propriété $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$ (condition initiale) ;*
2. *On suppose que la propriété est vraie pour un entier $n \geq n_0$ (Hypothèse de récurrence) et on en déduit que la propriété reste vraie pour $n + 1$.*

1.2 Exercices

Exercice 2 *:*
Montrons que $\forall n \geq 6$,

$$2^n \geq 6n + 7$$

SOLUTION :

1. **Condition initiale :** si $n = 6$ on a $2^n = 2^6 = 64$ et $6n + 7 = 6 \times 6 + 7 = 43$.

   Comme $64 \geq 43$ alors pour $n = 6$ on a $2^n \geq 6n + 7$
2. Considérons un entier $n \geq 6$ et admettons (Hypothèse de récurrence) que $2^n \geq 6n + 7$

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\
&\geq 2 \times (6n + 7) \quad \text{par Hypothèse de récurrence} \\
&= 12n + 14 \\
&= 6n + 6 + 6n + 7 + 1 \\
&= (6n + 6) + 7 + 6n + 1 \\
&= 6(n + 1) + 7 + 6n + 1 \\
&\geq 6(n + 1) + 7
\end{aligned}$$

   Comme $2^{n+1} \geq 6(n + 1) + 7$ alors la propriété est vraie pour $n + 1$ et par conséquent,

$$\forall n \geq 6, \quad 2^n \geq 6n + 7$$

Exercice 3 *:*
Montrer que $2^{2n} + 2$ est multiple de 3 pour tout entier naturel n

SOLUTION :

1. **Condition initiale** : pour $n = 0$ on a $2^{2n} + 2 = 2^0 + 2 = 3$ qui est évidemment un multiple de 3.

2. Admettons que $2^{2n}+2$ soit un multiple de 3.

   Dans ce cas il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{2n}+2 = 3k$.

$$\begin{aligned}
2^{2(n+1)}+2 &= 2^{2n+2}+2 \\
&= 4\times 2^{2n}+2 \\
&= \left(3\times 2^{2n}+1\times 2^{2n}\right)+2 \\
&= 3\times 2^{2n}+2^{2n}+2 \\
&= 3\times 2^{2n}+\left(2^{2n}+2\right) \\
&= 3\times 2^{2n}+3k \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= 3\times(2^n+k)
\end{aligned}$$

Comme $2^{2(n+1)}+2 = 3\times(2^n+k)$, c'est à dire que $2^{2(n+1)}+2$ est multiple de 3 alors la propriété reste vraie pour $n+1$ et on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

1.3 Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels

Nous savons que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ne dispose pas de structure de groupe lorsque l'on y considère l'addition usuelle qui y est une loi de composition interne.

L'une des conséquences de cette lacune de structure est que les équations du type $a+x=b$ ne sont pas toujours résolubles dans $\mathbb{N}$.
Elles le sont toujours dans $\mathbb{Z}$ suite au fait que $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe (abélien).
L'addition dans $\mathbb{Z}$ est effectivement associative, admet 0 comme élément neutre et chaque élément de $\mathbb{Z}$ possède son opposé dans $\mathbb{Z}$.

À titre d'exemple, l'équation $5+x=3$ est impossible dans $\mathbb{N}$ mais elle admet $S=\{-2\}$ comme ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$.

En plus de la structure de groupe que possède $(\mathbb{Z},+)$, rappelons que la multiplication dans $\mathbb{Z}$ est associative et distributive par rapport à l'addition et admet 1 comme élément neutre.

Lorsque l'on dispose d'un ensemble E muni de deux lois de composition internes $*$ et $\top$, on dit que $(E,*,\top)$ est un **anneau** si :

1. $(E,*)$ est un groupe abélien ;

2. $\top$ est associative et distributive par rapport à $*$

Si en plus de ces deux conditions, la loi $\top$ admet un élément neutre, on dit que $(E,*,\top)$ est un **anneau unitaire**.

De manière générale, la première loi d'un anneau est notée additivement tandis que la seconde est notée multiplicativement.
Il en résulte que l'élément neutre de la première loi d'un anneau est souvent appelé **l'élément nul** (noté 0) tandis que celui de la seconde loi est **l'élément unité** (noté 1).

Pour un anneau $(E, +, \times)$ on note $E^\star = E \setminus \{0\}$ l'ensemble des éléments non nuls.

Un ensemble E muni d'une addition $(+)$ et d'une multiplication $(\times)$ internes est un **corps** si les conditions suivantes sont remplies :

1. $(E, +, \times)$ est un anneau ;

2. $(E^\star, \times)$ est un groupe

Si en plus de ces conditions, la multiplication est commutative, le corps $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

Une partie non vide F d'un corps $(K, +, \times)$ en est un sous-corps si la restriction à F de l'addition et de la multiplication internes de K fait de $(F, +, \times)$ un corps.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ possède donc une structure d'anneau unitaire lorsque l'on y considère les lois d'addition et de multiplication usuelles.
Toutefois, il convient de souligner le fait que l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un **corps**.
En effet, la structure $(\mathbb{Z}^\star, \times)$ n'est pas un groupe pour la simple raison que dans $\mathbb{Z}^\star$ seuls -1 et 1 sont inversibles.

Une des conséquences de cette lacune de la structure $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est que les équations de la forme $a \times x = b$ (avec $a \neq 0$) ne sont pas nécessairement résolubles dans $\mathbb{Z}$.

L'ensemble $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{N}^* \right\}$ est le corps des **nombres rationnels**.
Les nombres rationnels sont donc des nombres qui peuvent se mettre sous forme de fraction de deux nombres entiers.

Les différences entre les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont plus subtiles.

Durant l'Atiquité , les babyloniens utilisaient déjà un système de numération en base 60 ; système dans lequel toute quantité pouvait s'exprimer sous la forme $a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \cdots$.
Avec ce système sexadécimal, tous les nombres étaient donc des fractions et cela s'avérait suffisant pour les besoins mathématiques de l'époque .

Un saut conceptuel gigantesque fut réalisé vers 500 avant JC lorsqu'il fut découvert des quantités comme $\sqrt{2}$ qui ne peuvent jamais s'écrire comme fraction de deux nombres entiers.
Ce fut la découverte des nombres irrationnels qui permettent de compléter l'ensemble $\mathbb{Q}$ afin d'obtenir l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationnels}\}$$

1.3.1 Irrationalité de certains nombres

Comme souligné ci-haut, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{N}^\star \right\}$$

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ on peut mentionner l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux que l'on peut définir par :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

Remarque 4 *:*
on démontre qu'un nombre est rationnel ssi il admet une écriture décimale périodique ou finie.
Il en résulte que l'écriture décimale d'un nombre irrationnel est nécessairement infinie et non périodique.

La Géométrie élémentaire nous fournit plusieurs exemples des nombres irrationnels parmi lesquels on peut revenir sur $\sqrt{2}$ qui est la mesure de la diagonale d'un carré dont le côté mesure 1. On peut également citer le nombre π qui est le rapport de la mesure de la circonférence de tout cercle sur la mesure de son diamètre.

Montrons, effectivement, que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

En supposant par absurde, que $\sqrt{2}$ est rationnel, on admet l'existence de deux nombres entiers a et b, premiers entre eux (après une éventuelle simplification) tels que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad (\star)$$

De la fraction $(\star)$ on déduit, en élevant les deux membres au carré, que :

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Comme cette dernière égalité lie deux nombres entiers a^2 et $2b^2$, alors a^2 est un nombre entier pair. Dans ce cas, a est lui-même pair et il existe donc $a^{'} \in \mathbb{N}$ tel que

$$a = 2a^{'} \quad (\star\star)$$

En plaçant la relation $(\star\star)$ dans $a^2 = 2b^2$ on obtient :

$$4a\prime^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2a\prime^2$$

Dans ce cas , b^2 est pair, et donc b aussi. Il existe donc $b^{'} \in \mathbb{N}$ tel que $b = 2b^{'}$.

Comme 2 divise à la fois a et b on conclut que la fraction $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2a\prime}{2b\prime}$ n'est pas irréductible .
Ce qui est contradictoire ■ .

En plus du fait que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, la relation $\leq$ définie $\forall \quad x, y \in \mathbb{R}$ par $x \leq y$ s'il existe $z \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = y - z$ est un ordre total.

En effet,

— la relation $\leq$ est réflexive car $x \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

— la relation $\leq$ est antisymétrique car $\forall \quad x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent que $x = y$;

— la relation $\leq$ est transitive car $\forall \quad x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent que $x \leq z$.
En outre, quels que soient x et y dans $\mathbb{R}$ on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$

1.3.2 Propriété d'Archimède dans $\mathbb{R}$

Commençons cette section par le caractère archimédien de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Il existe plusieurs versions de l'**axiome Archimède** dans un ensemble des nombres totalement ordonné. L'une des plus répandues affirme que pour deux grandeurs inégales il toujours un multiple entier de la plus petite qui soit supérieur à la plus grande.
En d'autres termes, si les quantités x et y sont telles que $x < y$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y < nx$.
Quelle que soit la formulation considérée , on dira d'une structure totalement ordonnée qu'elle est archimédienne si elle vérifie une propriété similaire à l'axiome Archimède .

Proposition 6 *:*
le corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ *est archimédien . En d'autres termes :*

$$\forall \quad x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad n > x$$

Remarque 5 *:*
La propriété Archimède pour $\mathbb{R}$*, à première vue évidente , affirme que quel que soit le nombre réel* x *il existe un nombre entier naturel qui lui soit strictement supérieur . On pourrait traduire le caractère archimédien des nombres réels en disant que l'ensemble* $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *n'est pas majoré dans* $\mathbb{R}$.

Définition 5 (Partie entière) *:*
Considérons $x \in$. *On appelle partie entière de* x*, le nombre entier noté* $E(x)$ *qui est tel que* $E(x) \leq x < E(x) + 1$

$$E(23,675) = 23, \quad E(-2,34) = -3, \cdots$$

Montrons que pour tout nombre réel x, la partie entière $E(x)$ existe et est unique.

— **Existence** :

Considérons x un nombre réel positif. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.
Dans ce cas, l'ensemble $K = \{k \in \mathbb{N} : \quad k \leq x\}$ est fini car tout élément $k \in K$ est un entier naturel tel que $0 \leq k < n$.

Comme toute partie finie de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément, notons :

$$k_{max} = maxK$$

D'une part $k_{max} \leq x$ car $k_{max} \in K$.

D'autre part, $k_{max} + 1 > x$ car $k_{max} + 1 \notin K$

Du système $\begin{cases} k_{max} \leq x \\ k_{max} + 1 > x \end{cases}$ on déduit que :

$$k_{max} \leq x < k_{max} + 1$$

En prenant $E(x) = k_{max} = max\{k \in \mathbb{N} : \quad k \leq x\}$, la partie entière $E(x)$ existe donc et remplit bien la condition $E(x) \leq x < E(x) + 1$

— **Unicité** :
Montrons que la partie entière $E(x)$ est unique $\forall x \in \mathbb{R}$

Supposons qu'il existe, pour un réel x, deux nombres entiers n_1 et n_2 tels que

$$n_1 \leq x < n_1 + 1 \quad \text{et} \quad n_2 \leq x < n_2 + 1$$

$$\begin{cases} n_1 \leq x < n_1 + 1 \\ n_2 \leq x < n_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow n_1 \leq x < n_2 + 1 \Rightarrow n_1 < n_2 + 1 \quad (i)$$

En inter changeant les rôles de n_1 et n_2 on déduit également de ce système que :

$$n_2 \leq x < n_1 + 1 \longleftrightarrow n_2 < n_1 + 1 \quad (ii)$$

(i) et (ii) impliquent que :

$$\begin{cases} n_1 < n_2 + 1 \\ n_2 < n_1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 - 1 < n_2 \\ n_2 < n_1 + 1 \end{cases} \Rightarrow n_1 - 1 < n_2 < n_1 + 1$$

Comme il n'existe qu'un nombre entier n_1 entre $n_1 - 1$ et $n_1 + 1$, alors la relation $n_1 - 1 < n_2 < n_1 + 1$ implique que $n_1 = n_2$ ■

Le cas $x < 0$ est similaire.

.

1.3.3 Ensemble $\mathbb{R}$ comme espace métrique

Définition 6 *:*
Considérons E un ensemble non vide et $d : E \times E \mapsto \mathbb{R}$ une application.
On dit que $d : E \times E \mapsto \mathbb{R}$ est une distance sur E ssi

— ***Positivité :*** $d(a, b) \geq 0 \quad \forall a, b \in E$ *;*

— ***Non dégénérescence :*** $d(a, b) = 0$ *ssi* $a = b$ *;*

— ***Symétrie :*** $d(a,b) = d(b,a) \quad \forall a, b \in E$;

— ***Inégalité triangulaire :*** $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) \quad \forall a, b$ *et* $c \in E$

Remarque 6 *:*
lorsqu'un ensemble E est muni d'une distance d on dit que (E,d) est un espace métrique .

Définition 7 (Valeur absolue) *:*
pour tout nombre réel x, la valeur absolue $|x|$ de x est , par définition,

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

La valeur absolue possède les propriétés suivantes :

1. $|x| \geq 0$;

2. $|x| = 0$ ssi $x = 0$;

3. $|-x| = |x|$;

4. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Remarque 7 (Distance naturelle sur $\mathbb{R}$) *:*
À la valeur absolue $|x|$ dans $\mathbb{R}$ est naturellement associée une distance $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie $\forall \quad x, y \in \mathbb{F}$ par

$$d\,(x, y) = |y - z|$$

L'application ainsi définie est effectivement une distance sur $\mathbb{R}$ car :

— Positivité : $d(x,y) = |y - x| \geq 0$;

— Non dégénérescence : $d(x,y) = 0 \Rightarrow |y - x| = 0 \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow x = y$,

— Symétrie : $d(y,x) = |x - y| = |y - x| = d(x,y)$,

— Inégalité triangulaire $d(x,z) = |z - x| = |(z - y) + (y - x)| \leq |y - x| + |z - y| = d(x,y) + d(y,z)$

1.3.4 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Dans les lignes qui suivent, nous établissons l'importante propriété de la densité de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels dans celui des nombres réels (ainsi que celle de la densité de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels dans celui des nombres réels).
En d'autres termes, tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient une infinité des nombres rationnels ainsi qu'une infinité des nombres irrationnels.

Intervalles

Rappelons qu'un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\forall \quad a, b \in I, \forall \quad x \in \mathbb{R} \quad (a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I)$$

Ainsi, dès qu'un intervalle contient deux réels distincts, il contient tous les réels qui leurs sont intermédiaires .

Un intervalle ouvert est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x < b\}$ où a et b sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 8 (Voisinage) *:*
soit $a \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}$.
On dit de V que c'est un voisinage du point a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.

Densité

Proposition 7 *:*
tout intervalle I de $\mathbb{R}$ contient un nombre rationnel.

Remarque 8 (Constats préliminaires à la démonstration) *:*

— *Considérons I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Comme I contient nécessairement un intervalle ouvert de la forme $]a, b[$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, il nous suffira de montrer que tout intervalle $]a, b[$ contient un nombre rationnel r pour achever la démonstration (sans nuire à sa généralité).*

— *Considérons un intervalle ouvert $]a, b[$.*

Exhiber un nombre rationnel $r = \frac{p}{q}$ tel que$p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$, équivaut à trouver un entier naturel non nul q et un entier relatif p tel que :

$$a < \frac{p}{q} < b \Leftrightarrow aq < p < bq$$

Or, pour que l'intervalle $]aq, bq[$ contienne un nombre entier p, il suffira que son amplitude $bq - aq = q(b - a)$ dépasse 1.

1. Forts de ces constats, commençons par justifier, pour tout intervalle $]a, b[$, l'existence d'un entier naturel non nul q tel que l'amplitude $bq - aq = q(b - a)$ de l'intervalle $]aq, bq[$ soit strictement supérieure à 1.

   Comme $\mathbb{R}$ est archimédien et $\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}_+$, il existe un entier naturel q non nul tel que :

   $$\frac{1}{b-a} < q \Leftrightarrow 1 < q(b-a) \Leftrightarrow q(b-a) = qb - qa > 1$$

   Dans ce cas, l'intervalle $]aq, bq[$ contient au moins un nombre entier.

2. Considérons le nombre entier p (car somme de deux entiers) défini par :

$$p = E(aq) + 1$$

Par définition de la partie entière d'un réel on a,

$$E(aq) \leq aq < E(aq) + 1 \Leftrightarrow aq < p \quad \text{ou encore}$$

$$a < \frac{p}{q} \tag{1.1}$$

En outre, de la relation $p = E(aq) + 1$ on tire que $p - 1 = E(aq) \leq aq$

Comme $p - 1 \leq aq$ alors $\frac{p-1}{q} \leq a$, ou encore

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a \Leftrightarrow \frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q}$$

Comme $\frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q}$ et $q > \frac{1}{b-a}$ i.e. $\frac{1}{q} < (b - a)$ alors :

$$\frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + (b - a) = b$$

On obtient alors :

$$\frac{p}{q} < b \tag{1.2}$$

En combinant les relations 1.1 et 1.2 on obtient :

$$\begin{cases} a < \frac{p}{q} \\ \frac{p}{q} < b \end{cases} \Rightarrow a < \frac{p}{q} < b$$

Comme $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $a < \frac{p}{q} < b$ alors $\frac{p}{q}$ est un nombre rationnel appartenant à $]a, b[$ ■

Proposition 8 *:*
tout intervalle I de $\mathbb{R}$ contient un irrationnel.

Remarquons d'abord que la somme $x = r + i$, d'un rationnel r et d'un irrationnel i est nécessairement irrationnelle car si x était rationnel, la différence $x - r = i$ serait également rationnelle compte tenu du fait que $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe. Or i est irrationnel.

Considérons $]a, b[$ un intervalle ouvert quelconque.
Pour montrer que I contient nécessairement un irrationnel, remarquons que d'après la proposition 7, que l'intervalle $I^{'} = \left]a - \sqrt{2}, a + \sqrt{2}\right[$ contient un rationnel r.

De la relation $a - \sqrt{2} < r < a + \sqrt{2}$ on déduit que :

$$r + \sqrt{2} \in]a, b[$$

Ce qui achève d'établir que l'intervalle $]a, b[$ contient nécessairement un nombre irrationnel $r + \sqrt{2}$

Proposition 9 (Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) *:*

— *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels : en d'autres termes, tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient une infinité des nombres rationnels.*

— *L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels : en d'autres termes, tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient une infinité des nombres irrationnels.*

Comme tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient nécessairement un intervalle ouvert de la forme $]a, b[$, il nous suffit de montrer que tout intervalle de la forme $I =]a, b[$ contient une infinité des rationnels et diirrationnels.

Considérons $I =]a, b[$ un intervalle ouvert quelconque. Il est évident que pour tout entier naturel $n > 1$, les n intervalles ci-dessous sont des sous-intervalles de $I =]a, b[$ et ils sont deux à deux disjoints :

$$I_1 = \left]a, a + \frac{b-a}{n}\right[, \quad I_2 = \left]a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}\right[, \cdots, I_n = \left]a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\right[$$

Tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contient un nombre rationnel.
D'après les propositions 7 et 8, chacun des sous intervalles $I_1, I_2, \cdots, I_n$ contient un rationnel et un irrationnel.
Dans ce cas, tout intervalle $=]a, b[$ contient au moins n rationnels et n irrationnels.

Comme ceci est vrai $\forall \quad n > 1$, on en déduit que tout intervalle $=]a, b[$ contient une infinité des rationnels et d'irrationnels. ■

1.3.5 Propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Rappelons qu'en considérant la relation d'ordre total définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \leq y \quad \text{ssi} \quad \exists \quad z \in \mathbb{R}_+ : \quad y = x + z$$

— Un réel α est appelé **plus grand élément** d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ si :

$$\alpha \in A \quad et \quad \forall \quad x \in A, x \leq \alpha$$

On sait que lorsqu'il existe, le plus grand élément d'une partie A est unique et on le note $\max A$

— Le **plus petit élément** d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$, s'il existe, est le seul réel α, noté $\min A$ tel que :

$$\alpha \in A \quad et \quad \forall x \in A, x \geq \alpha$$

Ainsi, par exemple, $\max [a, b] = b, \quad \min [a, b] = a$, mais $]a, b[$ n'a ni le plus grand ni le plus petit élément .

— Nous savons qu'un réel M est **un majorant** d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ si $\forall x \in A, \quad x \leq M$.
On dit qu'un réel m est **un minorant** d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ si $\forall x \in A, \quad x \geq m$.

Définition 9 (Borne supérieure) *:*
Considérons A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

— *Le réel α est* ***la borne supérieure*** *de A si α est le plus petit des majorants de A.*
Dans ce cas on note $\alpha = \sup A$. En d'autres termes :

$$\alpha = \sup A \Leftrightarrow [(\forall x \in A, x \leq \alpha) \quad \textit{et} \quad (\textit{si} \quad \beta \in \mathbb{R} \quad \textit{est tel que} \quad \forall y \in A, y \leq \beta \quad \textit{alors} \quad \beta \geq \alpha)]$$

— *Le réel α est* ***la borne inférieure*** *de A si α est le plus grand des minorants de A.*
Dans ce cas on note $\alpha = \inf A$. En d'autres termes :

$$\alpha = \inf A \Leftrightarrow [(\forall x \in A, x \geq \alpha) \quad \textit{et} \quad (\textit{si} \quad \beta \in \mathbb{R} \quad \textit{est tel que} \quad \forall y \in A, y \geq \beta \quad \textit{alors} \quad \beta \leq \alpha)]$$

Ainsi, par exemple, $\sup\,]2,9] = 9$, $\quad \sup\,[-7,10[= 10$, $\quad \inf\,]2,+\infty[= 2$, mais $]2,+\infty[$ n'admet pas de borne supérieure .

L'une des caractéristiques de l'ensemble $\mathbb{R}$ par rapport à cette notion de borne supérieure se résume dans la proposition ci-dessous que nous admettons avant d'établir **une importante caractérisation de la borne supérieure d'une partie non vide de** $\mathbb{R}$.

Proposition 10 *:*

1. *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure :*

2. *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure .*

Proposition 11 (Caractérisation de la borne supérieure) *:*
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que :

1. *Si $x \in A$ alors $x \leq \sup A$;*

2. *Pour tout nombre réel $y < \sup A$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$.*

En effet,

1. **Conditions nécessaires** :

   Admettons que $\sup A$ soit effectivement un majorant de A.

   (a) Comme $\sup A$ est, en particulier, un majorant de A, il vérifie nécessairement la condition 1 :

$$\text{si} \quad x \in A \quad \text{alors} \quad x \leq \sup A$$

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $y < \sup A$.
Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, alors y n'est pas un majorant de A : cela signifie qu'il existe au moins un élément $x \in A$ tel que $y < x$. Ce qui achève de prouver que $\sup A$ vérifié également la condition 2 :

$$\text{Pour tout nombre réel } y < \sup A, \text{ il existe } x \in A \text{ tel que } y < x$$

2. **Conditions suffisantes** :

Montrons que si un réel α vérifie les conditions 1. et 2. Alors $\alpha = \sup A$.

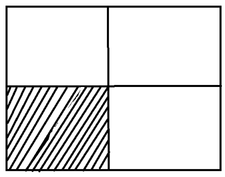
(a) D'après 1. : si $x \in A$ alors $x \leq \sup A$.
Ainsi α est un majorant de A.

(b) Supposons par l'absurde que le majorant α remplit la condition 2. sans être le plus petit des majorants de A.
Il existe donc un autre majorant y de A tel que $y < \alpha$. D'après la condition 2., il existe donc $x \in A$ tel que $y < x$, ce qui contredit le fait que y soit un majorant de A
■

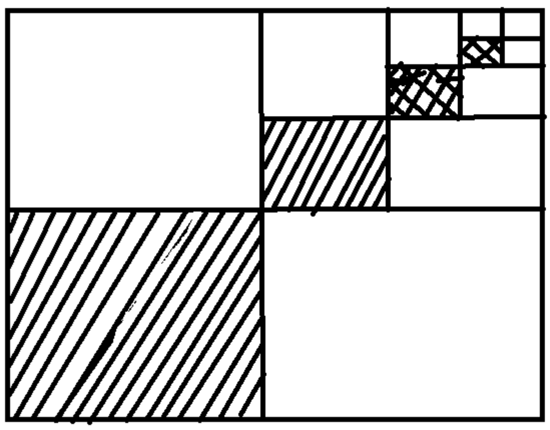
1.4 Suites numériques

1.4.1 Exemple liminaire et premières définitions

Considérons un carré de côté 1.
Partageons ce carré en quatre carrés isométriques et colorions le carré situé en bas à gauche (étape1) :



Recommençons ce procédé avec le carré situé dans la partie supérieure droite (étape 2) et ainsi de suite. Appelons u_n l'aire de la surface totale colorée au bout de la $n-$ième étape :



1. Calculons $,u_0, u_1, u_2$ et u_3 :
   - $u_0 = 0$
   - $u_1 = \frac{1}{4}$
   - $u_2 = u_1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}$

— $u_3 = u_2 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}$

2. Essayons d'exprimer u_n :

— $u_4 = u_3 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4}$

— $\vdots$

—

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{4^{n-1} + 4^{n-2} + 4^{n-3} + \cdots + 4 + 1}{4^n} \\ &= \frac{1 \times \frac{1-4^n}{1-4}}{4^n} \\ &= \frac{\frac{4^n-1}{3}}{4^n} = \frac{4^n - 1}{3 \times 4^n} = \frac{4^n}{3 \times 4^n} - \frac{1}{3 \times 4^n} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n} \end{aligned}$$

3. De l'expression $u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n}$ nous déduisons que la surface totale coloriée au bout de la n-ième étape est un nombre exprimé en fonction du nombre entier n.
Les valeurs $u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots$ sont des images d'une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par

$$f(n) = u_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

Une telle fonction est une **suite réelle**.

Définition 10 *:*
Une suite (u_n) est une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Dans ce cas, la valeur $u_n = f(n)$ est appelée ***terme général de rang*** *n de la suite (u_n).*

Il existe plusieurs manières de définir une suite :

— on peut exprimer son terme général $u_n = f(n)$;

— on peut la définir par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ ainsi que d'un terme initial. (Exemple : donner les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n + 6$) ;

— on peut tout simplement énumérer la liste de ses éléments.

Définition 11 *:*
Considérons une suite (u_n).

— *On dit que (u_n) est* ***monotone croissante*** *si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$*

— *On dit que (u_n) est* ***monotone décroissante*** *si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$*

— *Si la suite (u_n) est telle que $u_n = u_{n+1} \quad \forall n$ alors la suite (u_n) est dite constante.*

Illustration 2 :
La suite (u_n) *de l'exemple introductif définie* $\forall n \in \mathbb{N}$ *par* $u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 4^n}$ *est croissante.*
En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^{n+1}} - \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n}\right] \\ &= \frac{1}{3 \times 4^n} - \frac{1}{3 \times 4^{n+1}} \\ &= \frac{4-1}{3 \times 4^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} > 0 \end{aligned}$$

Remarque 9 :
Il convient de souligner qu'une suite est dite monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

- *Une suite* (u_n) *définie sur* $E \subset \mathbb{N}$ *est dite strictement croissante (respectivement strictement décroissante) si* $\forall n \in E$ *on a* $u_{n+1} > u_n$ *(respectivement* $u_{n+1} < u_n$ *).*
- *Une suite* (u_n) *est croissante à partir d'un certain rang s'il existe un entier* n_0 *telle que* $\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} \geq u_n$. *On définit de manière similaire (`mutatis mutandis`) une suite décroissante à partir d'un certain rang.*
- *On dit d'une suite* (u_n) *qu'elle est* ***stationnaire*** *si elle est constante à partir d'un certain rang.*
- *La suite* (u_n) *est dite* ***périodique*** *de période* p *si pour tout entier naturel* n *on a :* $u_{n+p} = u_n$.

Définition 12 :
Une suite (u_n) *est dite* ***majorée*** *par un nombre réel* M *si* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$.

Dans ce cas, le nombre réel M *est un* ***majorant*** *de la suite* (u_n).
Si M' *est un nombre réel tel que* $M \leq M'$ *alors* M' *est aussi un majorant de la suite* (u_n). *Une suite majorée possède donc une infinité des majorants et dans ce cas, le plus petit des majorants s'appelle* ***borne supérieure*** *de la suite.*

Exemple 1 :
La suite (u_n) *de l'exemple introductif définie* $\forall n \in \mathbb{N}$ *par* $u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 4^n}$ *est majorée par* $\frac{1}{3}$. *En effet,* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{3} - u_n = \frac{1}{3\times 4^n} \geq 0$

Définition 13 :
Une suite (u_n) *est dite* ***minorée*** *par un nombre réel* m *si* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m$. *Dans ce cas, le nombre réel* m *est un* ***minorant*** *de la suite* (u_n).
Si m' *est un nombre réel tel que* $m \geq m'$ *alors* m' *est aussi un minorant de la suite* (u_n). *Une suite minorée possède donc une infinité des minorants et dans ce cas, le plus grand des minorants s'appelle* ***borne inférieure*** *de la suite.*

Définition 14 :
Une suite est dite ***bornée*** *si est à la fois majorée et minorée. Dans ce cas, il existe deux nombres réels* m *et* M *tels que tous les termes de la suite appartiennent dans l'intervalle* $[m, M]$.

Exemple 2 :
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de terme général* $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$

On a d'une part $-1 \leq \sin n \leq +1$ *et* $n^2 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Il en résulte que* $|u_n| \leq 1$. *C'est-à-dire,* $-1 \leq u_n \leq +1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. *La suite* (u_n) *est donc bornée.*

Un cas particulièrement simple est celui des suites **arithmétiques** et **géométriques**.

Définition 15 :
Considérons une suite (u_n).

— *La suite* (u_n) *est dite* ***arithmétique*** *de raison* r *si* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r$. *Dans ce cas, le terme de rang* n *vaut :*
$$u_n = u_1 + (n-1)r$$
On démontre également que la somme S_n *des* n *premiers termes vaut :*
$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)}{2}$$

— *La suite* (u_n) *est dite* ***géométrique*** *de raison* q *si* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$. *Dans ce cas, le terme général de rang* n *vaut :*
$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$
On démontre également que la somme S_n *des* n *premiers termes d'une suite géométrique* (u_n) *vaut :*
$$S_n = u_1 \times \frac{(1-q^n)}{1-q}$$

Problème 1 :
Discuter suivant les valeurs de sa raison r, *la variation (croissance ou décroissante) d'une suite arithmétique* (u_n). *Réaliser ensuite la même discussion pour une suite géométrique.*

Solution :

1. Pour une suite arithmétique (u_n) de raison r on a :
$$\begin{cases} \text{si} \quad r > 0 \quad \text{alors la suite} \quad (u_n) \quad \text{est} \quad \text{croissante ;} \\ \text{si} \quad r < 0 \quad \text{alors la suite} \quad (u_n) \quad \text{est} \quad \text{décroissante ;} \\ \text{si} \quad r = 0 \quad \text{alors la suite} \quad (u_n) \quad \text{est} \quad \text{constante} \end{cases}$$

2. Pour une suite géométrique (v_n) de raison q on a :
$$\begin{cases} \text{si} \quad q > 1 \quad \text{alors la suite} \quad (v_n) \quad \text{est} \quad \text{croissante et } \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty \\ \text{si} \quad 0 < q < 1 \quad \text{alors la suite} \quad (v_n) \quad \text{est} \quad \text{décroissante et } \lim_{n\to+\infty} q^n = 0 \\ \text{si} \quad q = 1 \quad \text{alors la suite} \quad (v_n) \quad \text{est} \quad \text{constante} \end{cases}$$

1.4.2 Convergence et divergence des suites

Revenons sur l'exemple introductif qui nous a conduit sur la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 4^n}$. En essayant de calculer un après un tous les termes de cette suite on obtient un tableau du genre :

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
u_n	0	0.25	0.3125	0.3281	0.332	0.333	$\cdots$

Ce tableau indique clairement qu'à mesure que n est grand, le terme général u_n de la suite (u_n) s'approche de plus en plus de $\frac{1}{3} \approx 0.333\cdots$

La quantité $\left|u_n - \frac{1}{3}\right|$ devient de plus en plus proche de zéro à mesure que n devient grand. On dit que la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{3}$ ou encore que $l = \frac{1}{3}$ est la limite de la suite (u_n) et on écrit :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

Si pour une raison ou une autre il se pose le besoin de trouver un rang n à partir duquel tous les termes u_n de la suite s'écartent de la valeur $l = \frac{1}{3}$ d'une quantité ne dépassant pas $\epsilon = 0.0001$ on peut procéder ainsi :

$$\begin{aligned}\left|u_n - \frac{1}{3}\right| &= \left|\frac{1}{3\times 4^n} - \frac{1}{3}\right| \\ &= \left|-\frac{1}{3\times 4^n}\right| \\ &= \frac{1}{3\times 4^n}\end{aligned}$$

La condition $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{10000}$ entraine alors que

$$\frac{1}{3\times 4^n} \leq \frac{1}{10000} \Rightarrow 4^n \geq \frac{10000}{3} \Rightarrow n \geq 4.19...$$

Ainsi, tous les termes de la suite (u_n) sont tels que $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leq 0.0001$ dès que $n \geq N(0.0001 \approx 4.13...$

Cela revient à dire que tous les termes de la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 4^n}$ sont dans l'intervalle $\left[\frac{1}{3} - 0.0001, \frac{1}{3} + 0.0001\right]$ à partir de u_5.

Partant de cet exemple, on peut formaliser la notion de convergence d'une suite par la définition suivante :

Définition 16 *:*
Une suite (u_n) est dite ***convergente*** *vers la limite l si à tout nombre positif ϵ, aussi petit que l'on veut, on peut associer un nombre réel $N(\epsilon)$ tel que l'inégalité $|u_n - l| \leq \epsilon$ soit satisfaite par tous les termes de la suite (u_n) dès que $n \geq N(\epsilon)$.*
Dans le cas contraire on dit que la suite est ***divergente****.*

Exemple 3 *:*
La suite (u_n) *de terme général* $u_n = \frac{n-2}{2n}$ *converge vers* $\frac{1}{2}$ *car à chaque quantité* $\epsilon > 0$*, on peut associer une quantité* $N(\epsilon)$ *tel que* $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \epsilon$ *pour toutes les valeurs* $n \geq N(\epsilon)$

Nous admettons que lorsqu'une suite est convergente, sa limite doit être unique. Une suite est divergente si sa limite est infinie ou inexistante.

1.4.3 Propriétés et calculs des limites

Limite d'une suite du type $u_n = f(n)$

Nous admettons la propriété suivante pour les limites de ce genre de suites :

Proposition 12 *Considérons une suite* (u_n) *dont le terme général est donnée par* $u_n = f(n)$ *avec* f *une fonction numérique. Si la fonction* f *a une limite finie* l *en* $+\infty$*, alors ma suite* (u_n) *est convergente et on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Exemple 4 *La suite de terme général* $u_n = \frac{3n+5}{2n-8}$ *converge vers* $\frac{2}{3}$

Propriétés de comparaison

Les propriétés de comparaisons utilisées pour les calculs des limites des fonctions restent valables pour les suites.

Proposition 13 *Considérons une suite* (u_n)*.*

— *S'il existe une suite* (v_n) *telle que* $u_n \geq v_n$ *à partir d'un certain rang et si* $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ *alors*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

— *S'il existe une suite* (v_n) *telle que* $u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang et si* $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ *alors*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Exemple 5 *Etudions la convergence de la suite de terme général* $u_n = n^2 + \sin n$

Solution et discussion :

Comme $\sin n \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$u_n \geq n^2 - 1 \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

Notons (v_n) la suite de terme général $v_n = n^2 - 1$. Il résulte alors de la relation 1.3 que les suites (u_n) et (v_n) sont telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq v_n$.

En remarquant que $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - 1\right) = +\infty$ on déduit de la proposition 13 que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Proposition 14 *Théorème des gendarmes :*

Considérons une suite (u_n). S'il existe deux suites (v_n) et (w_n) telles que $v_n \geq u_n \geq w_n$ à partir d'un certain rang et que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

Exemple 6 *Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{\cos n}{n}$ converge vers zéro.*

Solution et discussion :

De la relation $-1 \leq \cos n \leq +1$ nous déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{-1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n} \tag{1.4}$$

Dans l'esprit du *théorème des gendarmes*, la relation 1.4 nous inspire de considérer deux suites (v_n) et (w_n) définies par leurs termes généraux respectifs, avec :

$$\begin{cases} v_n = \frac{-1}{n} \\ w_n = \frac{1}{n} \end{cases}$$

En étudiant la convergence des suites (les deux gendarmes) (v_n) et (w_n) on remarque évidemment que

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0 \\ \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

Comme les suites (v_n) et (w_n) ont la même limite $(l = 0)$ il résulte alors du théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$$

Limite d'une suite monotone

Proposition 15 *Les propriétés suivantes permettent de démontrer l'existence de la limite d'une suite sans en préciser la valeur.*

- *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Illustration 3 ***Un exemple célèbre*** *:*
Leibnitz, Bernoulli et Euler ont chacun, à son tour, étudié la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son terme général :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

.

Appliquons la proposition 15 pour en dégager les propriétés :

1. **Variation :**

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\
&= \left[1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right] - \left[1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right] \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

2. **Recherche d'un majorant :**

Pour $k \geq 2$, il est évident que
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k}, \quad (*)$$
Trouvons les constantes A et B permettant de faire la décomposition :
$$\frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} \quad (**)$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k(k-1)} &= \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} \\
&= \frac{A(k-1) + Bk}{k(k-1)} \\
&= \frac{(A+B)k - A}{k(k-1)}
\end{aligned}$$

A ce stade, l'identification $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{(A+B)k-A}{k(k-1)}$ entraine nécessairement $\left\{\begin{array}{l} A + B = 0 \\ A = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \end{array}\right.$

Ces valeurs des constantes A et B placées dans la relation $(**)$ donnent alors :

$$\frac{1}{k^2 - k} = \frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (***)$$

En plaçant $(***)$ dans $(*)$ on obtient l'inégalité :
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 2$$

En tenant compte de cette dernière dans l'expression du terme général v_n on trouve :

$$\begin{aligned}
v_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \\
&\leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - n
\end{aligned}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq 2 - n$ alors 2 est un majorant de la suite (v_n). Comme cette dernière est croissante et majorée, la proposition refconv entraine qu'elle est convergente.

Remarque 10 *Pour ce qui est de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son terme général :*

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

, Leibnitz avait essayé en vain d'en calculer la limite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots = \lim_{n\to+\infty} v_n$. Un des frères Bernoulli avait réussi à démontrer que cette suite est convergente avant que son élève Euler ne démontre plus tard qu'elle converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

1.4.4 Suite de Cauchy et passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$

Consécutivement au problème 3 (page 35), lorsqu'une suite (u_n) converge vers un nombre réel l, on peut affirmer que tout intervalle ouvert contenant l contient en réalité tous les termes u_n de la suite à partir d'un certain rang n_0. Un tel intervalle $[l - \epsilon, l + \epsilon]$ pouvant être très petit (ça dépend de la petitesse de ϵ), nous en déduisons une importante propriété des suites convergentes : **à partir d'un certain rang, deux quelconques de leurs termes peuvent être aussi proches qu'on le souhaite.**

En effet, si (u_n) converge vers l, à tout nombre positif ϵ on peut associer une quantité $N(\epsilon) \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \geq N(\epsilon), \quad |u_n - l| \leq \epsilon$.

C'est un peu comme si la convergence d'une suite (u_n) vers l entraine implicitement l'existence d'une *fonction* $N : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ associant à chaque quantité $\epsilon > 0$ aussi petite que l'on veut, un nombre réel $N(\epsilon)$ tel que $|u_n - l| \leq \epsilon$ dès que $n \geq N(\epsilon)$.

Soient $\epsilon > 0$ un nombre réel positif aussi petite que l'on veut et (u_n) une suite convergeant vers l. Conformément à la *fonction* $N : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, considérons la quantité $N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ qui est, par définition, telle que $\forall n \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right), |u_n - l| \geq \frac{\epsilon}{2}$
Il en résulte que tous les termes de la suite (u_n) qui sont tels que $n \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ la double inégalité $-\frac{\epsilon}{2} \leq u_n \leq +\frac{\epsilon}{2}$ est vérifiée.
Ainsi ,

$$\forall n \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right), \quad u_n \in \left[l - \frac{\epsilon}{2}, l + \frac{\epsilon}{2}\right]$$

Comme tous les termes de la suite (u_n) à partir du rang $n \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ appartiennent à l'intervalle $I = \left[l - \frac{\epsilon}{2}, l + \frac{\epsilon}{2}\right]$ dont l'amplitude est $\left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) - \left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon$ nous en déduisons que pour deux entier naturels quelconques $p \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ et $q \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ on a nécessairement l'inégalité :

$$|u_p - u_q| \leq \epsilon$$

En bref, pour toute suite convergente (u_n), il existe pour toute quantité positive ϵ, un rang à partir duquel la distance $|u_p - u_q|$ entre deux termes quelconques ne dépasse pas ϵ. On dit alors que toute suite convergente vérifie la **condition de Cauchy** [4]. Plus exactement,

4. Le baron AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, mathématicien français né à Paris en 1789 et mort à Sceaux en 1857. Il a fait de travaux de haute facture dans le domaine de l'Analyse mathématique.

Définition 17 *Une suite* (u_n) *est une suite de Cauchy si* $\forall \epsilon > 0$ *il existe un rang* n_0 *tel que* $\forall m, n \geq n_0, \quad |u_m - u_n| \leq \epsilon$

Les suites de Cauchy jouent un rôle majeur en Analyse mathématique et permettent de définir une importante catégorie d'espaces métriques (voir définition **??**, page **??**). En effet, il résulte de la discussion ci-dessus que :

1. **Toute suite convergente est une suite de Cauchy**.
2. **Il est sage de retenir que la réciproque n'est pas nécessairement vraie : il existe des espaces métriques (E, d) dans lesquels une suite de Cauchy peut ne pas converger.**

Sans trop vouloir appuyer sur ces notions théoriques, terminons ce paragraphe en notant que c'est justement cette notion qui permet de souligner une importante différence entre les corps $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$:

Définition 18 *Considérons un espace métrique* (E, d)*.*
- *on dit que* (E, d) *est* **complet** *si toute suite de Cauchy* $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ *d'éléments de* E *converge nécessairement vers un éléments de* E*.*
- *Dans ce cas,* (E, d) *n'est pas complet s'il existe une suite de Cauchy* $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ *d'éléments de* E *dont la limite* l *n'appartient pas à* E*.*

S'agissant des ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

1. on démontre que toute suite de Cauchy des nombres réels converge nécessairement vers un nombre réel. L'ensemble $\mathbb{R}$ est donc complet.
2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet, on peut montrer, par exemple, que la suite (u_n) de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \cdots \frac{1}{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots 2 \times 1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

est une suite dont tous les termes sont des nombres rationnels mais sa limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \approx 2.71828 \cdots$$

est un **nombre irrationnel très célèbre** qui nous servira même de base pour les très importantes fonctions logarithme et exponentielle néperiennes.

1.5 Exercices des travaux dirigés

Exercice 4 *:*
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. *Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel ;*

2. *La somme des deux irrationnels est irrationnelle ;*

3. *Le produit des deux nombres irrationnels est irrationnel,*

4. *La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle ;*

5. $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, +, \times)$ *est un sous- corps de* $(\mathbb{R}, +, \times)$

`Indications de solutions:`

1. **En toute généralité, cette affirmation est fausse :** si $x = 0 \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $xy \in \mathbb{Q}$

   Ainsi, si le rationnel x est nul, le produit xy sera nul et donc rationnel quel que soit le nombre irrationnel y.

   Cependant, si un rationnel est non nul, alors son produit par tout irrationnel est irrationnel.
   En effet, $\forall x \in \mathbb{Q}^\star$, $\quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $z = xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car dans le cas contraire (si $z = xy \in \mathbb{Q}$) on aurait $y = \frac{z}{x} \in \mathbb{Q}$
   Ce qui serait contradictoire !
   En bref, cette affirmation est vraie si l'on impose au nombre rationnel d'être non nul : le produit de tout nombre rationnel non nul par un nombre irrationnel est nécessairement un nombre irrationnel .

2. L'**affirmation est fausse** car si les deux nombres sont irrationnels opposés , leur somme sera nulle et donc rationnelle.

3. Faux. On peut prendre, par exemple, $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \in \mathbb{Q}$;

4. Vrai : si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $z = x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   Dans le cas contraire, $y = z - x$ serait rationnel.

5. Faux.
   $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, +, \times)$ n'est pas un sous- corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$ pour plusieurs raisons parmi lesquelles on peut mentionner :
   (a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas stable pour l'addition (Voir b)) ;
   (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne contient ni 0 ni 1 ;
   (c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas stable pour la multiplication ...

6. Trivialement VRAI.

Exercice 5 *:*
Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$,

1. $0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$,

2. En déduire que $A = \left\{\frac{mn}{(m+n)^2}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\right\}$ *admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera .*

Solution:

1. Montrons que $0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}, \forall \quad m, n \in \mathbb{N}^*$:

   (a) La relation $0 < \frac{mn}{(m+n)^2}$ est triviale car $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$;

   (b) En calculant la différence entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{mn}{(m+n)^2}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} - \frac{mn}{(m+n)^2} &= \frac{(m+n)^2 - 4mn}{(m+n)^2} \\
&= \frac{(m^2 + 2mn + n^2) - 4mn}{(m+n)^2} \\
&= \frac{m^2 - 2mn + n^2}{(m+n)^2} \\
&= \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2} \\
&= \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

   Comme $\frac{1}{4} - \frac{mn}{(m+n)^2} = \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 \geq 0$ alors $\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}, \forall \quad m, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Il résulte de la relation $0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}, \forall \quad m, n \in \mathbb{N}^*$ que l'ensemble $A = \left\{\frac{mn}{(m+n)^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ car 0 en est un minorant et $\frac{1}{4}$ en est un majorant.

   (a) Cherchons la borne inférieure de la partie minorée $A = \left\{\frac{mn}{(m+n)^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$:

   Comme $\alpha = \inf A$ est, par définition , le plus grand des minorants de A et 0 est un minorant de A, on a nécessairement :

$$0 \leq \inf A \tag{1.5}$$

Comme $\inf A$, en tant que borne inférieure, est en particulier un minorant de A alors, quels que soient m et n dans $\mathbb{N}^*$ on a.

$$\inf A \leq \frac{mn}{(m+n)^2} \tag{1.6}$$

En fixant$m = 1$ dans la relation 1.6, cette inégalité devient :

$$\inf A \leq \frac{n}{(1+n)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{1.7}$$

En faisant tendre n vers l'infini dans la relation 1.7, on ontient :

$$\inf A \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+n)^2} = 0, \quad \text{en d'autres termes :}$$

$$\inf A \leq 0 \tag{1.8}$$

En combinant les relations 1.5 et 1.8 on obtient :

$$\begin{cases} 0 \leq \inf A \\ \inf A \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \inf A = 0$$

Notons $\alpha = \inf A$ la borne inférieure de A.

(b) Cherchons la borne supérieure de la partie majorée $A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$:

Comme $\sup A$ est, par définition , le plus petit des majorants de A et $\frac{1}{4}$ est un majorant de A, alors :

$$\sup A \leq \frac{1}{4} \tag{1.9}$$

Comme $\sup A$, en tant que borne supérieure, est en particulier un majorant de A alors, quels que soient m et n dans $\mathbb{N}^*$ on a.

$$\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \sup A \tag{1.10}$$

En prenant le cas $m = n$ dans la relation 1.10, cette inégalité devient :

$$\frac{n^2}{(n+n)^2} \leq \sup A \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{n^2}{4n^2} \leq \sup A \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \sup A \tag{1.11}$$

En combinant les relations 1.9 et 1.11 on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \leq \sup A \\ \sup A \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \sup A = 0\frac{1}{4}$$

Exercice 6 *:*
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 7 *:*
Au premier janvier 1995, une ville A compte 200000 habitants. A la même date une ville B compte 150000 habitants. On a constaté que la population de A diminue de 3% par an et que celle de la ville B augmente de 5% par an. On suppose que les croissances et les diminutions se poursuivent à ce rythme.

1. *Quelles seront les populations des villes A et B au premier janvier 1996 ?*
2. *Pour tout entier naturel n, on désigne par* a_n *la population de la ville A au premier janvier de l'année* $(1995 + n)$ *et par* b_n *la population de la ville B à la même date.*
   (a) *Vérifier que les suites* (a_n) *et* (b_n) *sont géométriques. Préciser leurs raisons respectives.*
   (b) *Au premier Janvier de quelle année, la population de la ville B sera-t-elle, pour la première fois, supérieure à celle de la ville A ?*

Exercice 8 *:*
Une personne reçoit 200 000$ en héritage. Le premier Janvier 1995, elle a placé cette somme à intérêts composés au taux annuel de 7.25%

1. *En notant* $u_0 = 200000$*, on désigne par* u_n *la somme dont elle dispose le premier Janvier de l'année* $(1995 + n)$
   (a) *Etablir une relation entre* u_{n+1} *et* u_n*. Quelle est la nature de la suite* (u_n) *?*
2. *Une publicité annonce :**Gagnez de l'argent avec le placement généreux qui rapporte 100% en 12 ans.***
   (a) *Ce placement est-il plus ou moins intéressant que le précédent ?*

Exercice 9 *Marine a le choix entre deux contrats de location concernant une maison qu'elle occupera 10 ans.*
- *CONTRAT 1 : le loyer annuel initial se monte à 42 000 francs et le locataire accepte une augmentation forfaitaire annuelle de 200 francs.*
- *CONTRAT 2 : le loyer annuel initial se mone à 38 000 francs et le locataire accepte une augmentation annuelle de 2% du loyer de l'année précédente.*

Notons u_n *le loyer de la* $n-$*ième année avec le contrat no 1 et* v_n *le loyer de la* $n-$*ième année avec le contrat no 2.*

1. *Trouver le terme général de chacune de ces deux suites*
2. *Si vous êtes Marine, lequel de ce contrat vous semble-t-il moins couteux ?*

Exercice 10 *:*
En 1800, l'Angleterre comptait 8 millions d'habitants. Malthus (1766-1834) avait émis l'hypothèse suivante :
- *la population de l'Angleterre suit une progression géométrique en augmentant de 2% par an ;*

— *l'agriculture anglaise en 1800 permet de nourrir 10 millions d'habitants et son amélioration permet de nourrir 500 000 habitants supplémentaires par an.*

1. *En traduisant les hypothèses de MALTHUS sous forme des suites, calculer la population de l'Angleterre en 1900 ainsi que le nombre de personnes que peut nourrir l'agriculture anglaise en 1900.*
2. *En adoptant cette hypothèse de MALTHUS, calculer l'année à partir de laquelle l'agriculture anglaise ne permet plus de nourrir la population anglaise.*

Problème 2 *:*
Considérons la (u_n) de terme général $u_n = \frac{n-2}{2n}$ de l'exemple 3 (page 26) et dont nous savons qu'elle converge vers $\frac{1}{2}$. Trouver un rang à partir duquel tous les termes de cette suite s'écartent de $\frac{1}{2}$ d'une quantité ne dépassant pas $\epsilon = 0.01$

Problème 3 *:*
Montrer que pour une suite convergente (u_n) de limite l, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[l-\epsilon, l+\epsilon]$

Solution :

Soit $(u)_n$ une suite convergeant vers l l et ϵ un nombre réel positif donné.
En vertu de la définition 16, il existe un nombre réel $N(\epsilon)$ tel que $\forall n \geq N(\epsilon)$ on a $|u_n - l| \geq \epsilon$.

Dans ce cas, pour tous les termes u_n de la suite pour lesquels $n \geq N(\epsilon)$ on a :
$-\epsilon \leq u_n - l \leq +\epsilon$
$\Rightarrow -\epsilon + l \leq u_n \leq \epsilon + l$
$\Rightarrow u_n \in [l-\epsilon, l+\epsilon]$ pour tout $n \geq N(\epsilon)$, ■

Exercice 11 *Montrer que* $\forall n \geq 1$ *on a :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 12 *Montrer que* $\forall n \geq 1$ *on a :*

$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Chapitre 2

Variation d'une fonction élémentaire

2.1 Variation d'une fonction réelle

Considérons, pour fixer les idées, la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 15x$.

En plaçant l'expression de cette fonction dans le traceur GRAPH [1] on obtient le graphique suivant :

La lecture de ce graphique indique clairement que la fonction f est croissante dans $]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[$, décroissante dans $]3, 5[$ et ses extrema sont respectivement :

— $(3, 8)$ pour le maximum,

1. Il en existe plusieurs. Nous utilisons souvent GRAPH pour sa gratuité et la simplicité de son utilisation

— $\left(5, \frac{20}{3}\right)$ pour le minimum

Il est d'usage de représenter une telle situation par un **tableau de variation** comme celui-ci :

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$\frac{20}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Définition 19 *:*
Par variation d'une fonction on sous-entend trois choses : la croissance, la décroissance ainsi que les extrema.

Définition 20 *:*
On dit d'une fonction f qu'elle est croissante sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si sur ce dernier, les images $f(x)$ varient dans le même sens que ses antécédents x.

Une fonction f est donc croissante sur I si $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Il en résulte que pour une telle fonction, sa courbe représentative est ascendante de gauche à droite dans l'intervalle I.

De manière analogue,

Définition 21 *:*
Une fonction f sera dite décroissante sur I si $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Il est évident que dans ce cas, la courbe représentative de la fonction f sera descendante de gauche à droite.

Définition 22 *:*
Considérons une fonction f.

- *On dit que la fonction f admet un **maximum** au point d'abscisse x_1 si pour tout x appartenant à un certain voisinage de x_1 on a la relation $f(x) \leq f(x_1)$.*
- *On dit que la fonction f admet un **minimum** au point d'abscisse x_2 si pour tout x appartenant à un certain voisinage de x_2 on a la relation*

$$f(x) \geq f(x_2)$$

.

Il convient de souligner le fait que si la fonction f admet un maximum au point x_1 alors elle est croissante à gauche de x_1 et décroissante à sa droite.

Dans le même ordre d'idées, si la fonction f admet un minimum au point x_2 alors elle est décroissante à gauche de x_2 et croissante à sa droite.

Remarque 11 :
Il est très important mais pas suffisant de connaître les définitions ci-dessus. Le plus utile serait de disposer d'un outil permettant de trouver analytiquement la variation d'une fonction donnée. Comme nous l'avons tous appris à l'école secondaire, l'outil le plus puissant pour étudier la variation d'une fonction s'appelle la dérivée.

2.2 Dérivation

Rappelons tout d'abord que l'équation de la droite d passant par les points A des coordonnées (x_A, y_A) et le point B des coordonnées (x_B, y_B) est donnée par la relation :

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

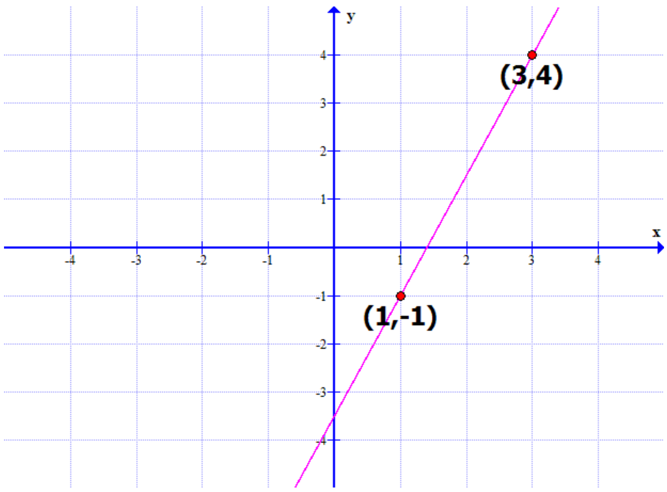
Dans cette relation, la quantité $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_A}{x - x_A}$ est la **pente**, ou encore le **coefficient angulaire** de la droite d de sorte que l'équation de la droite d passant par le point (x_1, y_1) et de pente m est :

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

La première relation permet de déterminer l'équation d'une droite connaissant les deux points par lesquels elle passe tandis que l'utilisation de la seconde n'exige qu'un seul point ainsi que la pente.

Exemple 7 :
L'équation de la droite d passant par $(1, -1)$ et $(3, 4)$ est :

$$y + 1 = \frac{4+1}{3-1}(x - 1) \equiv y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$$



Exemple 8 :
L'équation de la droite d passant par $(1, 2)$ et de pente $m = -1$ est $y - 2 = -1(x - 1) \equiv y = -x + 3$

Définition 23 *:*
On dit d'une fonction $y = f(x)$ qu'elle est dérivable au point d'abscisse x_0 si la quantité :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existe et est finie.}$$

*Dans ce cas, le nombre réel $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est appelée **nombre dérivé** de la fonction f au point d'abscisse x_0 .*

Dans la littérature mathématique, ce nombre dérivé est noté $f'(x_0)$ et il représente le coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse x_0 .

Ainsi la tangente passe par le point des coordonnées $M(x_0, f(x_0))$ et a pour pente $f'(x_0)$.

Il en résulte que l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Illustration 4 *:*
Considérons la fonction $f(x) = x^2$. En utilisant la définition de la dérivée, déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Solution :

La droite T passe par le point des coordonnées $(2, f(2)) = (2, 4)$ et a pour pente $f'(2)$.

La pente de la tangente vaut $f'(2) = \lim_{h\to 2} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4$ de sorte que l'équation de la tangente devienne $y - 4 = 4(x - 2)$ ou encore $y = 4x - 4$

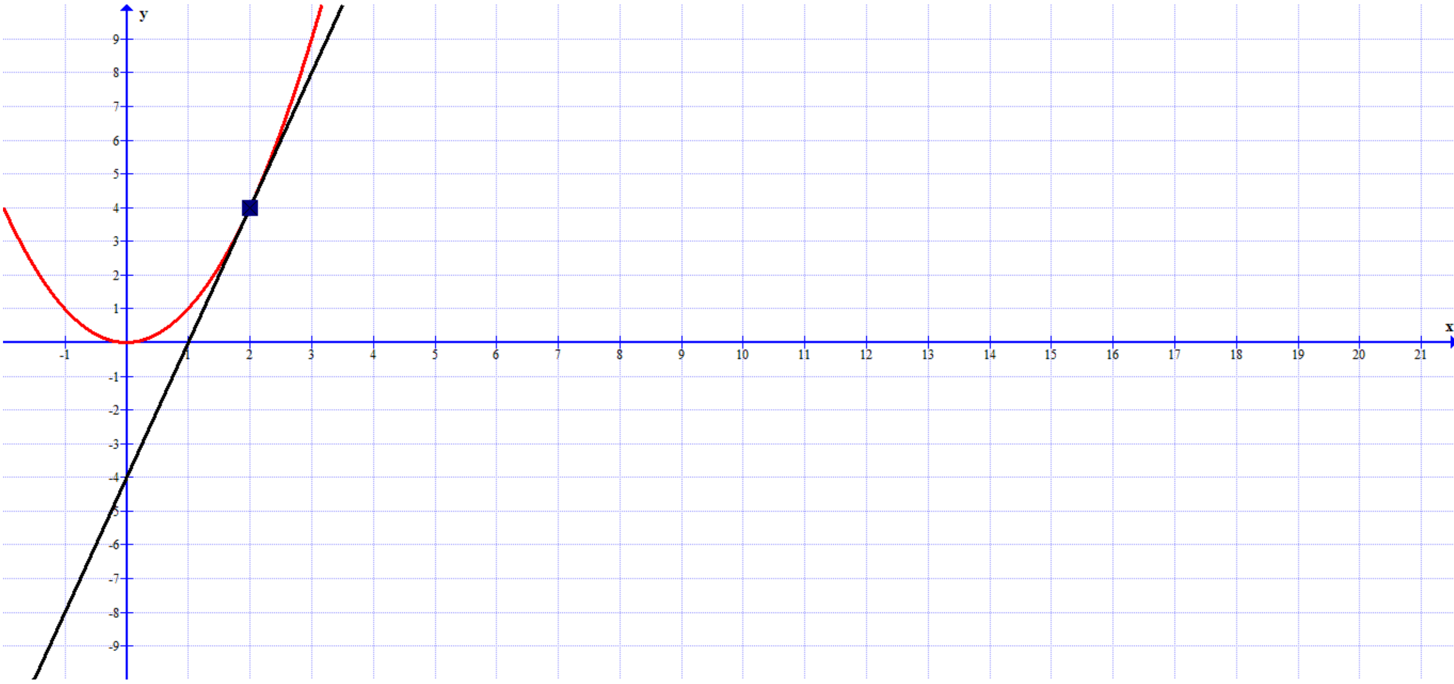
Illustrons cela en représentant sur un même repère la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite $y = 4x - 4$:

Nous remarquons justement sur ce graphique que la droite $y = 4x - 4$ est tangente à la courbe $y = x^2$ et le point de tangence est $M(2, 4)$

Remarque 12 *:*
Dans la pratique on n'utilise presque jamais la définition de la dérivée pour calculer une dérivée étant donné les difficultés évidentes auxquelles peut conduire la formule $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ lorsque l'expression de f n'est pas simple.

On contourne cette difficulté en utilisant la notion de **fonction dérivée** qui est la fonction notée f' et dont les images donnent les nombres dérivés aux points considérés.

On obtient la fonction dérivée en utilisant les propriétés de la dérivée :



Propr. 1 :
la dérivée d'une fonction constante est toujours nulle : $(5)' = (15)' = (100)' = \cdots = 0$

Propr. 2 :
La dérivée d'une somme des fonctions est égale à la somme de leurs dérivées respectives :

$$(f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x)$$

Propr. 3 :
Pour ce qui est des puissances de la variable x on utilise la formule :

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Illustration 5 :
$(x^5)' = 5x^4, \quad (2x^7)' = 14x^6, \quad (5x^4 + 2x^3 + 4x - 2)' = 20x^3 + 6x^2 + 4$

Propr. 4 :
La dérivée d'un produit n'est pas égale au produit des dérivées et la dérivée d'un quotient n'est pas égale au quotient des dérivées :

$$(u.v)' \neq u'.v' \quad et \quad \left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}$$

On utilise plutôt les formules :

$$(u.v) = u'.v + u.v' \quad et \quad \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

Exemple 9 *:*
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 + x^2 + 3$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = x\sqrt{x}$
5. $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2}{x}$

2.3 Application de la dérivée à la variation d'une fonction

Etudier la variation d'une fonction revient à déterminer un intervalle dans lequel elle est croissante, un intervalle dans lequel elle est décroissante et éventuellement ses valeurs extrêmes (maximum et minimum).

La dérivée constitue un outil puissant dans ce sens grâce à l'important résultat suivant :

Proposition 16 *:*
Une fonction f est croissante dans un intervalle I ssi sa dérivée y est positive. Elle y est décroissante dans le cas contraire.

Illustration 6 *:*
Etudier la variation de la fonction $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$

`INDICATION DE SOLUTION` : En calculant la dérivée nous avons

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x = x\left(\frac{3}{4}x - 3\right)$$

L'étude des signes de cette dérivée indique que la fonction f est croissante dans $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ et croissante dans $]0, 4[$.
Elle admet un maximum relatif pour $x = 0$ et un minimum relatif pour $x = 4$.

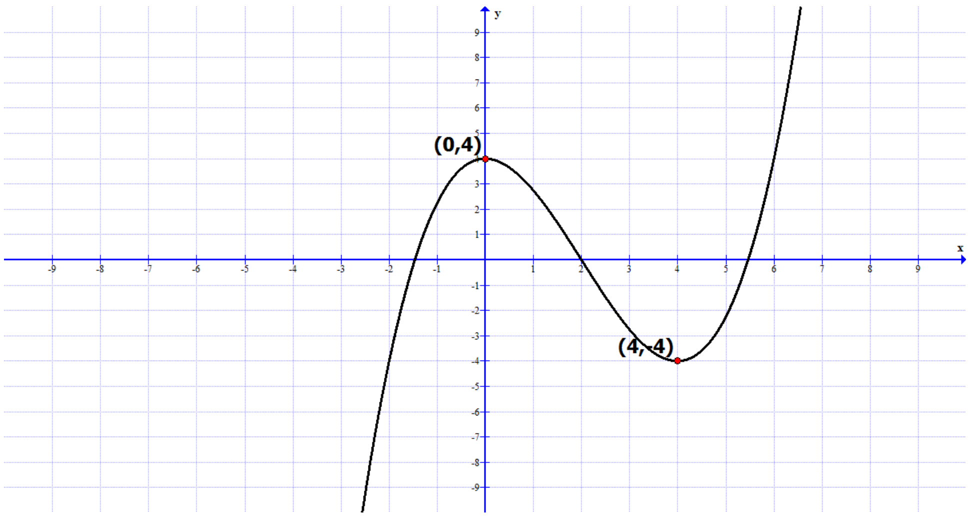
La représentation graphique ci-dessous confirme cette variation :

Illustration 7 *:*
Etudier la variation de $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$

Solution

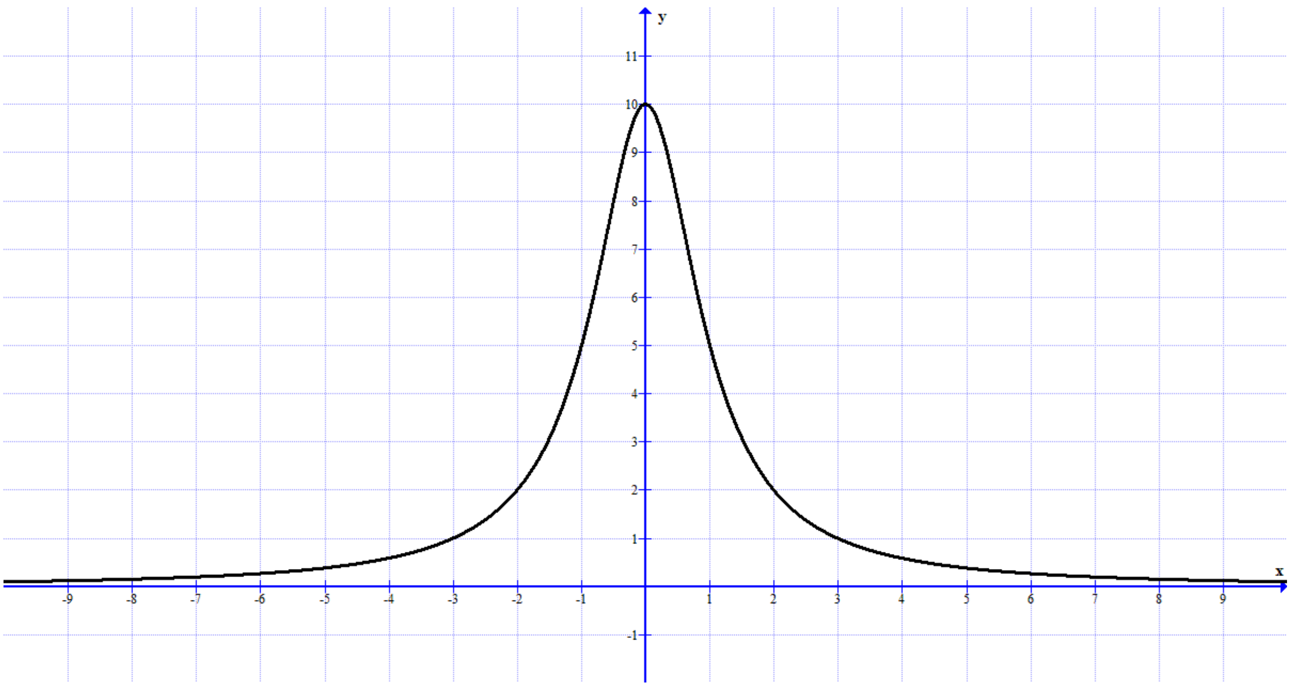
il est évident que le domaine de f est $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{-20x}{(1+x^2)^2}$$



Les signes de cette dérivée étant ceux de $-20x$, il va de soi que cette dérivée est positive dans $]-\infty, 0[$ et négative dans $]0, +\infty[$.

Il en résulte que f est croissante dans $]-\infty, 0[$ et décroissante dans $]0, +\infty[$, le point $(0, 10)$ correspondant à un maximum comme le montre ce graphique :



2.4 Cas des fonctions trigonométriques et compléments à la dérivation

Les notions élémentaires de trigonométrie sont *supposées connues*. Il n'est pas inutile d'avoir à l'esprit les formules dites de SIMPSON permettant de factoriser des fonctions trigonométriques élémentaires et qui s'utilisent assez couramment dans diverses situations.

L'objectif est de factoriser chacune des expressions : $\sin p + \cos q, \sin p - \cos q, \cos p + \cos q$ et enfin $\cos p - \cos q$.

Les deux premières expressions n'ayant que des sinus dans le premier membre alors que les deux dernières ont des cosinus il faut retenir que la forme générale des seconds membres est $2f_1\left(\frac{p+q}{2}\right)f_2\left(\frac{p-q}{2}\right)$ sauf pour la dernière formule dont la forme est :

$$\cos p - \cos q = -2f_1\left(\frac{p+q}{2}\right)f_2\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

En ajoutant à cela la double règle suivant laquelle :

1. lorsque le premier membre contient des sinus le second membre contient des fonctions trigonométriques différentes tandis qu'elles sont identiques lorsque le premier membre contient des cosinus,
2. quant aux deux premières formules, si le premier membre est la somme des sinus, alors le sinus se placera à la demi somme dans le second membre et par conséquent le cosinus à la demi différence ; et si le premier membre est la différence des sinus alors le sinus se placera à la demi différence et par conséquent le cosinus à la demi somme.

En appliquant simultanément ces règles on obtient les deux premières formules de SIMPSON :

$$\begin{cases} \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$$

Quant aux deux dernières formules, il suffit de considérer qu'on maintient cosinus dans le second membre si le premier membre contient la somme des cosinus et on chasse cosinus (au profit de sinus) le premier membre contient la différence des cosinus. On obtient :

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$$

2.4.1 Cas de la dérivée de la fonction $f(x) = \sin x$

Si $f(x) = \sin x$ alors pour tout $x_0 \in Df$ on a :

$$f^{'}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x_0+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Il en résulte que

$$\sin^{'}(x_0) = \lim_{h\to 0}\cos(x_0+\frac{h}{2})\times\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos(x_0+\frac{h}{2})\times\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos(x_0+\frac{h}{2})\times 1$$

Ainsi

$$\sin'(x_0) = \lim_{h\to 0} \cos(x_0 + \frac{h}{2}) = \cos(x_0)$$

Comme $\forall x_0 \in Df, \quad \sin'(x_0) = \cos(x_0)$ alors

$$\sin'(x) = \cos x$$

En utilisant la formule de la dérivation des fonctions composées on obtient pour toute fonction $u(x)$:

$$(\sin(u(x))' = u'(x)\cos(u(x))$$

Illustration 8 $\big(\sin(x^2 - 3x + 1)\big)' = (2x - 3)\cos(x^2 - 3x + 1)$

2.4.2 Cas de la fonction $f(x) = \cos x$

En remarquant que (angles complémentaires) $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, on obtient :

$$(\cos(x))' = \Big(\sin(\frac{\pi}{2} - x)\Big)' = (\frac{\pi}{2} - x)'\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$$

Ainsi

$$(\cos(x))' = -\sin x \quad et \quad (\cos(u(x)))' = -u'(x)\sin(u(x))$$

Illustration 9 *:*

$$\Big(\cos(\frac{1}{x})\Big)' = -\frac{1}{x^2}(-\sin(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})$$

2.4.3 Cas de la fonction $f(x) = \tan x$

En combinant les relations $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ on obtient :

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Aussi, si $u(x)$ est une fonction, on obtient :

$$(\tan(u(x)))' = (u(x))'\sec^2(u(x))$$

Illustration 10 *:*

$$\big(\tan(-x^2)\big)' = -2x\sec^2(-x^2)$$

2.4.4 Cas de la fonction $f(x) = \sec x$

Comme $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ et $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$, alors

$$(\sec(x))' = \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)' = \frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

De manière plus générale,

$$(\sec u)' = u'(x) \sec u \tan u$$

2.4.5 Cas des fonctions trigonométriques inverses

En considérant le fait que les fonctions $\arcsin x, \arccos x, \arctan x \cdots$ sont des fonctions réciproques des fonctions $\sin x, \cos x, \tan x \cdots$ et en tenant compte du fait que $\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{(f)'_y}$ on obtient sans peine les formules :

1. $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad (\arcsin(u))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

2. $$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad (\arccos(u))' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

3. $$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad (\arctan(u)) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

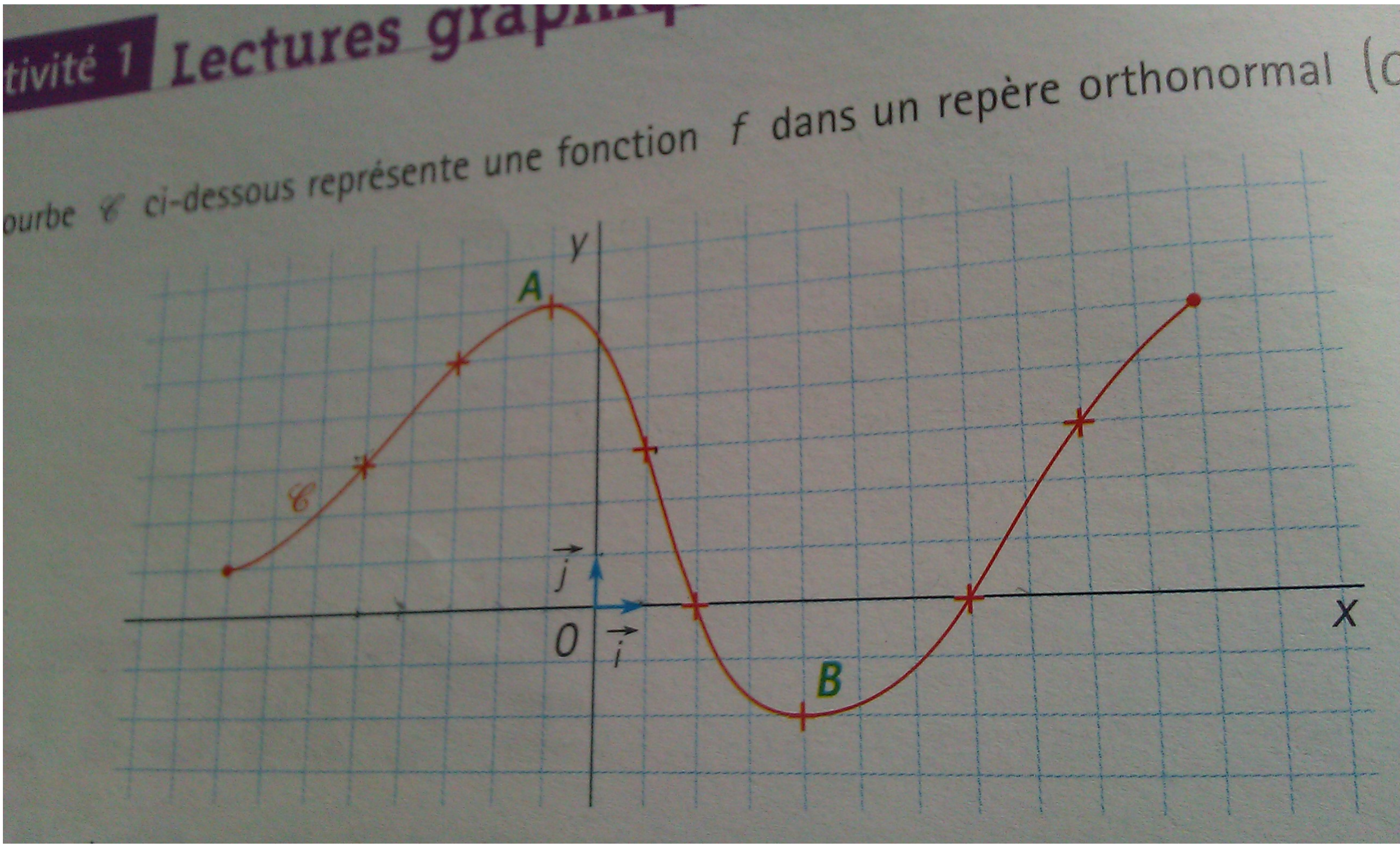
4. $\vdots$

2.5 Exercices et problèmes

1. **Lecture graphique :**
   Si le graphique suivant ne vous semble pas clair c'est en partie parce qu'il a été *volé* à la hâte dans un livre de Maths. Nous ignorons tout de l'expression explicite de la fonction f dont la photo donne la représentation :

   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-8, 11]$

   (b) Résoudre les équations $f(x) = 3$ et $f(x) = 0$



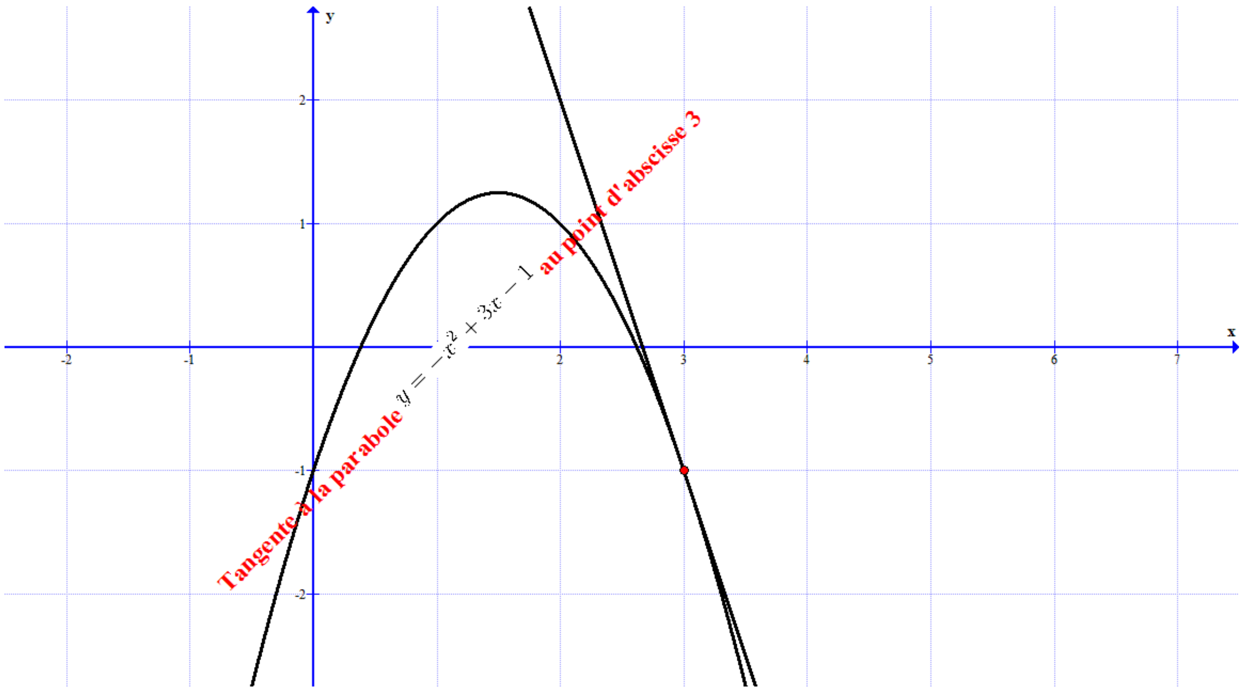
2. Considérons la parabole $y = -x^2 + 3x - 1$.
   Déterminer l'équation de la tangente T à cette parabole au point d'abscisse 3.

   Corrigé :

   La tangente passe par $(x_0, f(x_0))$ et a pour pente $f^{'}(x_0)$:

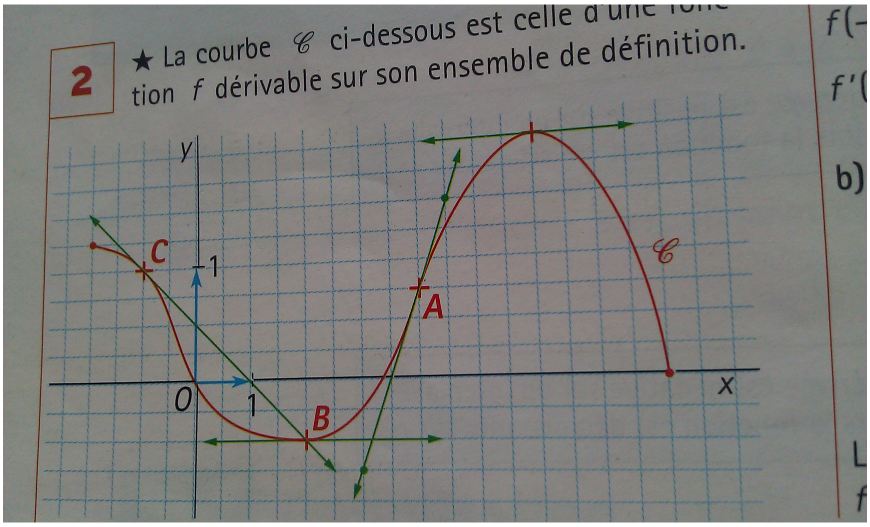
   $$f(x_0) = f(3) = -3^2 + 3 \times 3 - 1 = -1$$

   D'autre part $f^{'}(x) = (-x^2 + 3x - 1)^{'} = -2x + 3$ de sorte que $f^{'}(3) = -2 \times 3 + 3 = -3$.
   La tangente à la parabole $y = -x^2 + 3x - 1$ au point d'abscisse $x = 3$ a alors comme équation $y + 1 = -3(x - 3)$ c'est- à dire $y = -3x + 8$.
   On peut s'en convaincre en représentant la parabole et la tangente dans un même repère :



3. Retour aux graphiques volés :

   En observant soigneusement cette courbe, donner les équations des tangentes T_A et T_C aux points A et C.



4. Etudier la variation de la fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ sur l'intervalle $[0; 2\pi[$

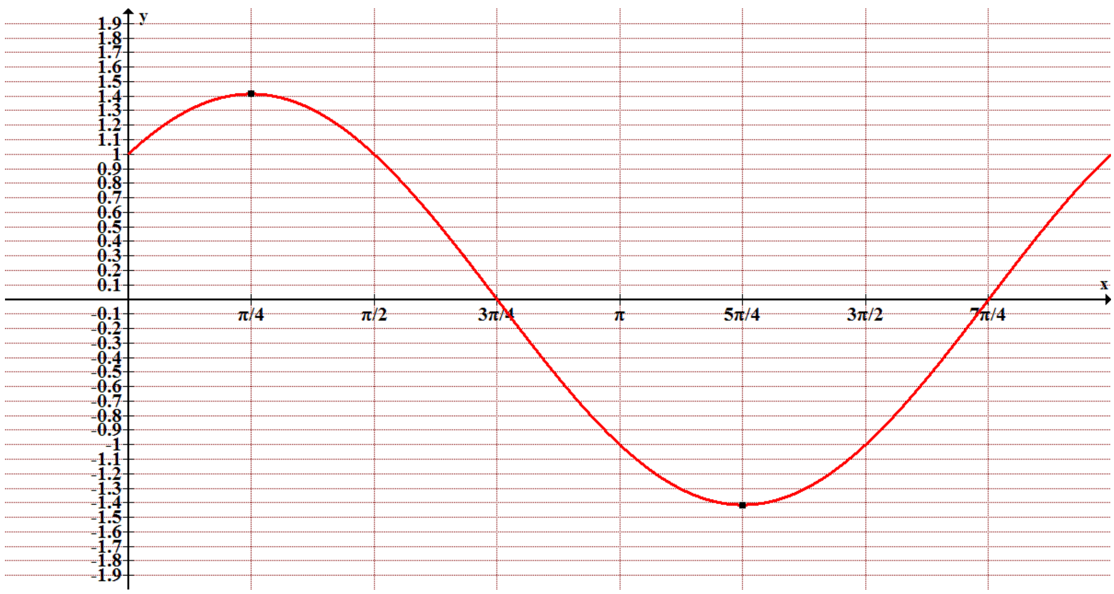
Corrigé :

Le domaine de définition de cette fonction est $\mathbb{R}$ mais comme il s'agit d'une fonction périodique de période 2π, nous pouvons nous limiter à $[0, 2\pi[$ comme domaine d'étude.

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= (\cos x + \sin x)^{'} \\ &= (\cos c)^{'} + (\sin x)^{'} \\ &= -\sin x + \cos x \\ &= \cos x - \sin x \end{aligned}$$

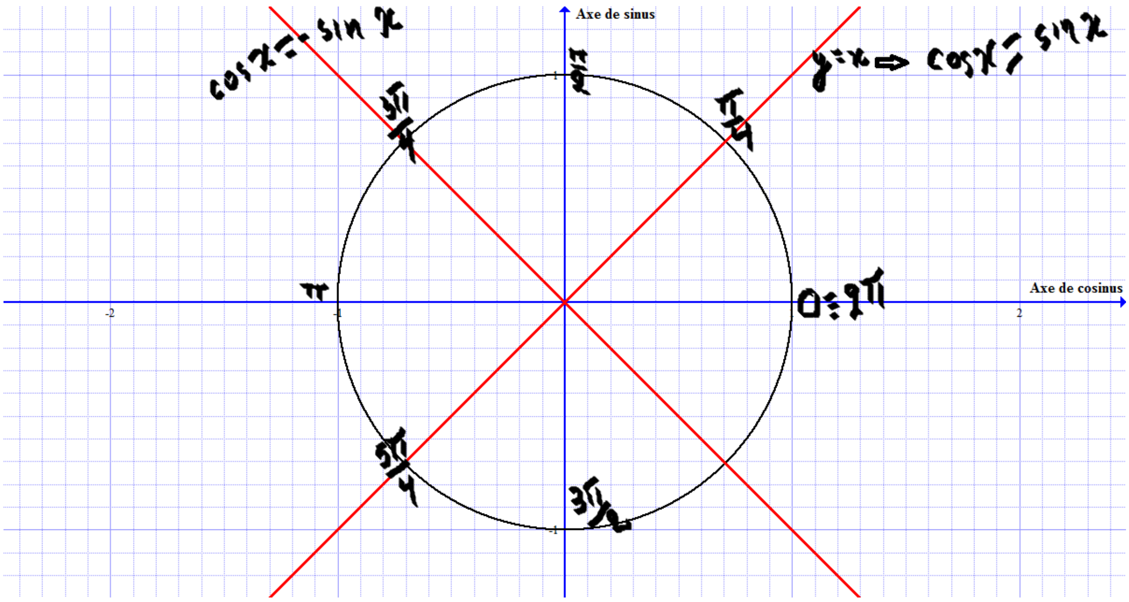
Pour étudier les signes de la dérivée $f^{'}(x) = \cos x - \sin x$, il faut d'une part garder à l'esprit que $\cos x$ est une abcisse (et de ce fait $\cos x$ est positif dans les premier et quatrième quadrant et négatif ailleurs). En d'autres termes, $\cos x \geq 0$ si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Dans le même ordre d'idées, $\sin x$ est une ordonnée (et de ce fait $\sin x$ est positif dans les premier et deuxième quadrants et négatif ailleurs). En d'autres termes, $\sin x \geq 0$ si $x \in [0, \pi]$



Quant aux signes de la dérivée $f^{'}(x) = \cos x - \sin x$, il est évident que comme il s'agit d'une fonction continue, elle ne peut pas changer de signes sans s'annuler. Cherchons d'abord les endroits où cette dérivée s'annule :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
&\Rightarrow \cos x = \sin x \quad \text{dans l'intervalle d'étude} \quad [0, 2\pi[\\
&\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{4}
\end{aligned}
$$



Ainsi, dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, les seuls endroits où $f'(x) = \cos x - \sin x$ peut changer de signes c'est aux points $x_1 = \frac{\pi}{4}$ et $x_2 = \frac{5\pi}{4}$: **il suffit alors de vérifier les signes des valeurs de cette dérivée à des abscisses remarquables dans chacun des trois sous-intervalles du domaine d'étude engendrés par ces deux valeurs** :

Les trois sous-intervalles engendrés par les valeurs $x_1 = \frac{\pi}{4}$ et $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ dans $[0, 2\pi[$ sont $I_1 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, $I_2 = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$ et $I_3 = \left]\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right[$

— En prenant $\frac{\pi}{6} \in I_1$ on a

$$
\begin{aligned}
f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$$

Dans ce cas $f^{'}(x) = \cos x - \sin x > 0$ dans $I_1 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

— En prenant $\frac{\pi}{2} \in I_2$ on a

$$f^{'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$$

Dans ce cas $f^{'}(x) = \cos x - \sin x < 0$ dans $I_2 = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$

— En prenant $\frac{3\pi}{2} \in I_3$ on a

$$f^{'}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = +1 > 0$$

Dans ce cas $f^{'}(x) = \cos x - \sin x > 0$ dans $I_3 = \left]\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right[$

La fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ est donc

— croissante dans $I_1 \cup I_3 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}\right[$ et

— décroissante dans $I_2 = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$

Comme en $x_1 = \frac{\pi}{4}$ la fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ passe de la croissance à la décroissance et en plus $f^{'}(x_1) = 0$ alors le point $(x_1, f(x_1)) = \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ est un maximum.

Comme en $x_1 = \frac{5\pi}{4}$ la fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ passe de la décroissance à la croissance et en plus $f^{'}(x_2) = 0$ alors le point $(x_2, f(x_2)) = \left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ est un minimum.

On peut s'en convaincre *visuellement* en représentant la fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ sur $[0, 2\pi[$:

5. Trouver les extrema de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{2+\sin x}$ sur $[0; 2\pi[$
6. **Problème corrigé :**

   (a) **Enoncé** :

      i. Considérons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

      $$f(x) = x^2 + \frac{432}{x} \tag{2.1}$$

      Etudier les variations de f et préciser les extrema s'il y a lieu.

      ii. On désire fabriquer un bassin de $216m^3$, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle dont la longueur est le double de la largeur. Les matériaux utilisés et la réalisation conduisent à un prix de revient de 180\$ par m^2 pour le fond du bassin et 240\$ par m^2 pour la surface latérale. **On désire connaître les dimensions à donner à ce bassin afin que le prix de revient soit minimal.**

      Soit x la largeur du bassin, exprimée en mètres.

A. Exprimer la hauteur h en fonction de x

B. Montrer que le prix de revient de ce bassin peut sécrire sous la forme $P(x) = k \times f(x)$, où k est un nombre réel à donner.

iii. Déterminer la largeur du bassin qui minimise le prix de revient. et calculer alors les autres dimensions de ce bassin.

iv. Calculer alors le prix de revient moyen de ce bassin pour un mètre cube.

(b) **Corrigé :**

i. La dérivée de f sur son domaine d'étude est :
En remarquant que la quantité est strictement positive , on en déduit que les signes de la dérivée sont ceux de .
Ainsi cette fonction est décroissante dans et croissante dans comme le confirme son graphe :

La dérivée de f sur son domaine d'étude est :

$$f^{'}(x) = 2x - \frac{432}{x^2} = \frac{2x^3 - 432}{x^2} = \frac{2(x^3 - 6^3)}{x^2} = \frac{2(x-6)(x^2+6x+36)}{x^2}$$

En remarquant que la quantité $\frac{2(x^2+6x+36)}{x^2}$ est strictement positive $\forall x \in Df$, on en déduit que les signes de la dérivée sont ceux de $x - 6$.

Ainsi cette fonction est décroissante dans $[0,6[$ et croissante dans $[6,+\infty[$.

La valeur minimale de la fonction $f(x) = x^2 + \frac{432}{x}$ est donc atteinte au point $x = 6$ et vaut :

$$f_{min} = f(6) = 6^2 + \frac{432}{6} = 36 + 72 = 108 \tag{2.2}$$

(c) Considérons les données relatives à la construction du bassin.

i. Si x est la largeur de cette piscine, sa longueur est (d'après les données du problème) $L = 2x$ de sorte que si h est la hauteur ; la formule $Volume = (Surfacedebase) \times hauteur$ se traduit par $216 = x.2x.h$ et il en résulte que :

$$h = \frac{216}{2x^2} = \frac{108}{x^2} \tag{2.3}$$

ii. La surface latérale est composée de deux rectangles de surface $L \times h$ chacun et deux autres rectangles de surface $l \times h$ chacun. Il en résulte que la surface latérale vaut :

$$SL = 2Lh + 2lh = 2.2x.\frac{108}{x^2} + 2.x.\frac{108}{x^2} = \frac{432}{x} + \frac{216}{x} = \frac{648}{x}$$

D'après le problème, le coût de la surface latérale est de 240\$ par m^2 de sorte que le prix de la surface latérale vaut :

$$P_1(x) = 240.\frac{648}{x} = \frac{155520}{x}$$

Par ailleurs la surface de fond (surface de base) vaut $Sb = L \times l = 2x.x = 2x^2$ de sorte que le prix du fond de la piscine vaut :

$$P_2(x) = 180.2x^2 = 360x^2$$

Au total le prix de la piscine vaut :

$$P(x) = P_2(x) + P_1(x) = 360x^2 + \frac{155520}{x} = 360.\left(x^2 + \frac{432}{x}\right) = 360.f(x)$$

Dans cette relation, il convient de remarquer que f est la fonction de la première partie définie par la relation 2.1 et dont nous savons que la valeur minimale est atteinte pour $x = 6$ et vaut $f_{min} = 108$ en vertu de la relation 2.2 .

(d) Comme $P^{'}(x) = (360f(x))^{'} = 360f^{'}(x)$, alors la fonction P atteint également son minimum pour $x = l = 6$

En revenant aux données du problème nous obtenons les dimensions qui minimisent le prix de la piscine :

$$l = 6m, \quad L = 2l = 12m \quad \text{et} \quad h = \frac{108}{x^2} = \frac{108}{36} = 3m \quad \text{(Voir la relation 2.3 pour } h\text{)}$$

En construisant une piscine de ces dimensions, son prix(le minimum possible) vaut :

$$P_{min} = \frac{155520}{6} + 360.6^2 = 38880\text{dollars}$$

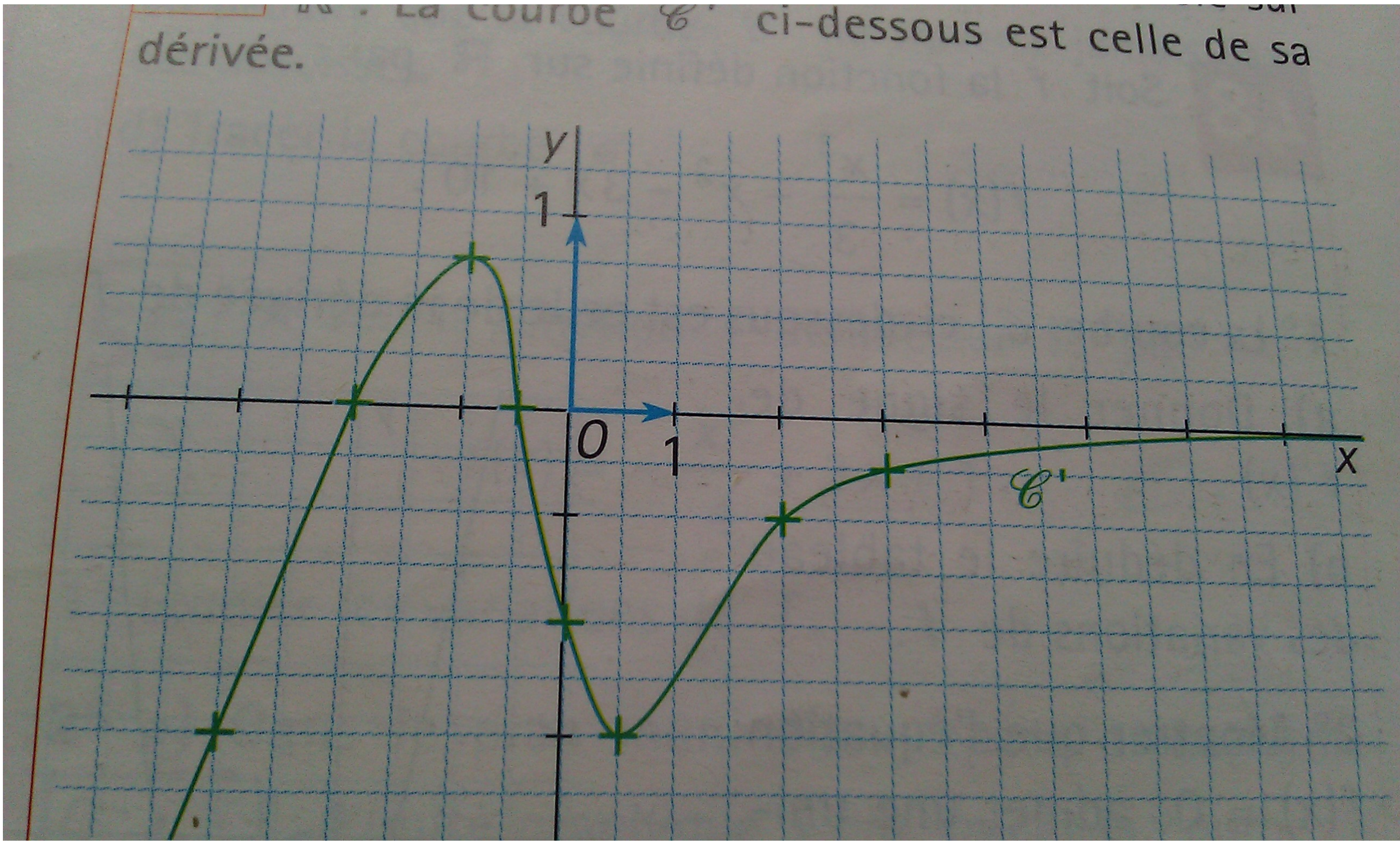
(e) Dans ce cas, le prix moyen par m^3 vaut

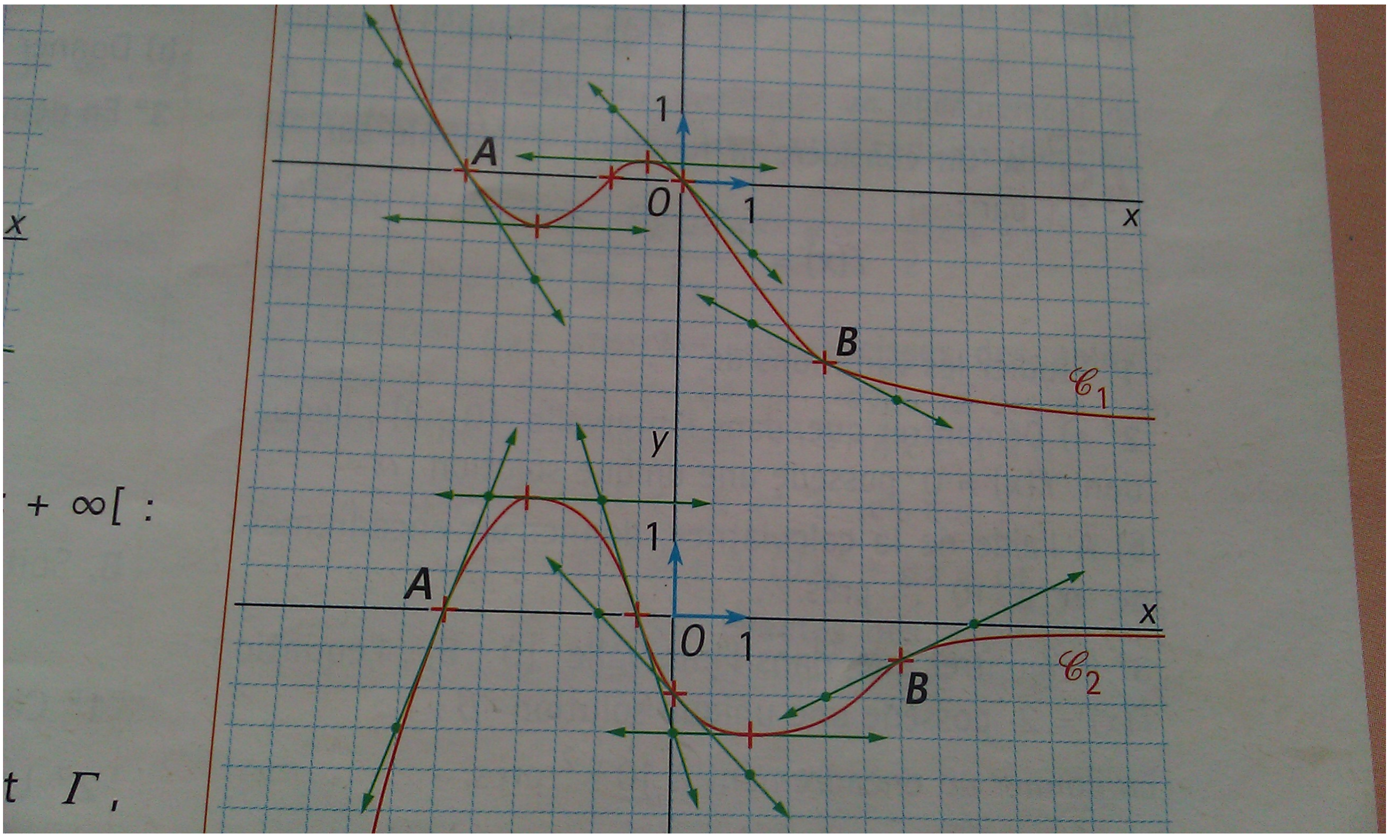
$$P_{moy} = \frac{38880}{216} = 180\text{dollars}/m^3$$

7. **D'autres graphiques volés :**

(a) Observer attentivement la première photo ci-dessous qui représente la dérivée d'une fonction inconnue f.

(b) Pour la seconde photo, nous disposons de la confirmation que l'une des courbes qui y sont représentées est celle de la fonction f. S'agit-il de la courbe à inférieure ou de celle à supérieure ?





2.6 Continuité et théorèmes des valeurs intermédiaires

2.6.1 Continuité

Définition 24 *:*
On dit d'une fonction f qu'elle est continue au point d'abscisse x_0 si pour des valeurs de x de plus en plus proches de x_0, la fonction f prend des valeurs de plus en plus proches de $f(x_0)$.
Plus formellement, f est continue au point x_0 ssi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Il convient de noter que cette formulation suppose évidemment que $x \in Df$.

Dans la pratique quotidienne d'étude des fonctions le fait que les fonctions élémentaires (polynômes, rationnelles, irrationnelles, ...) ont généralement leur domaine de continuité confondu avec celui de définition semble justifier le peu d'attention qui est accordé à l'importante notion de continuité.

Quel lien existe-t-il entre la continuité et la dérivabilité ?

Définition 25 *:*
On dit d'une fonction f qu'elle est continue dans l'intervalle I si elle est continue en tout point $x \in I$.

Dans ce cas, sur tout l'intervalle I, `la courbe représentative de f se dessine sans soulever le crayon !`

1. **Toute fonction dérivable en x_0 y est continue**

   En effet, si f est dérivable en x_0 , alors il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k$$

   Dans ce cas,

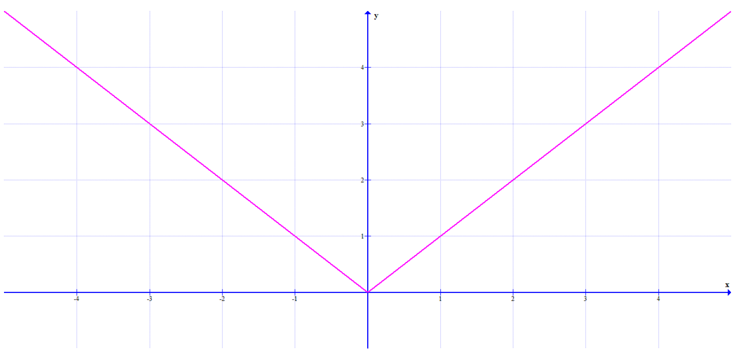
$$\begin{aligned} &\frac{lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)]}{\lim_{x \to x_0}(x - x_0)}, \\ \Rightarrow &\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} k.(x - x_0), \\ \Rightarrow &\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = k.0, \\ \Rightarrow &\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0, \end{aligned}$$

   $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ c'est-à-dire la fonction f est continue en x_0 .

2. **Une fonction peut-être dérivable en un point sans y être continue.**

   Montrons, par exemple, que $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

   Voici, à titre d'indication, la représentation graphique de $f(x) = |x|$:



$$\lim_{x \to 0} |x| = |0| = 0$$

   Comme $\lim_{x \to 0} |x| = |0|$ alors $f(x) = |x|$ est continue en $x = 0$.
   Pour ce qui est de la dérivabilité,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Comme $|x| = \begin{cases} x & \text{s} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{s} \quad x \leq 0 \end{cases}$ alors pour calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ il faut distinguer deux cas :

(a)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

(b)
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

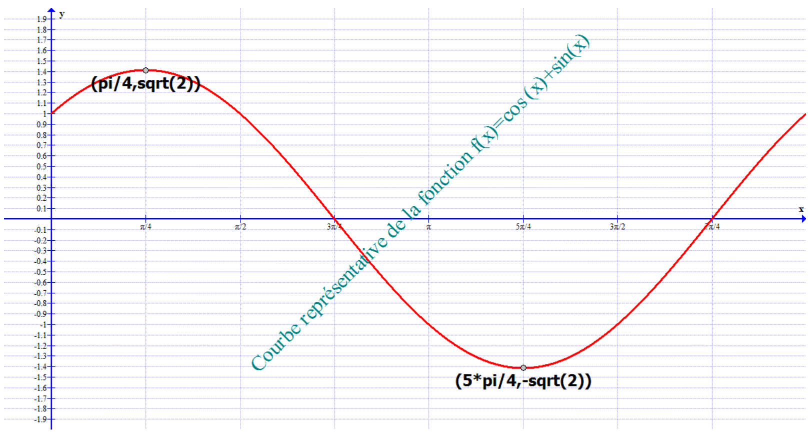
Comme la limite à gauche est différente de celle à droite, alors la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-0}{x-0}$ n'existe pas et par conséquent, la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

2.6.2 Théorèmes des valeurs intermédiaires

Il s'agit des théorèmes très intuitifs que nous admettons sans démonstration dont le rôle est crucial dans la recherche des solutions des équations du type $f(x) = k$ pour une fonction continue quelconque f et pour un nombre réel k.

Théorème 1 :
Si une fonction f est continue sur un intervalle $I = [a, b]$ et si $m\,(x_1, f(x_1))$ et $M\,(x_2, f(x_2))$ sont respectivement le minimum et le maximum locaux de la fonction f sur l'intervalle $I = [a, b]$ alors pour toute valeur $y \in [f(x_1), f(x_2)]$ (c'est-à-dire y est compris entre le minimum et le maximum de f sur $I = [a, b]$) il existe au moins une valeur $c \in I$ telle que $f(c) = y$.

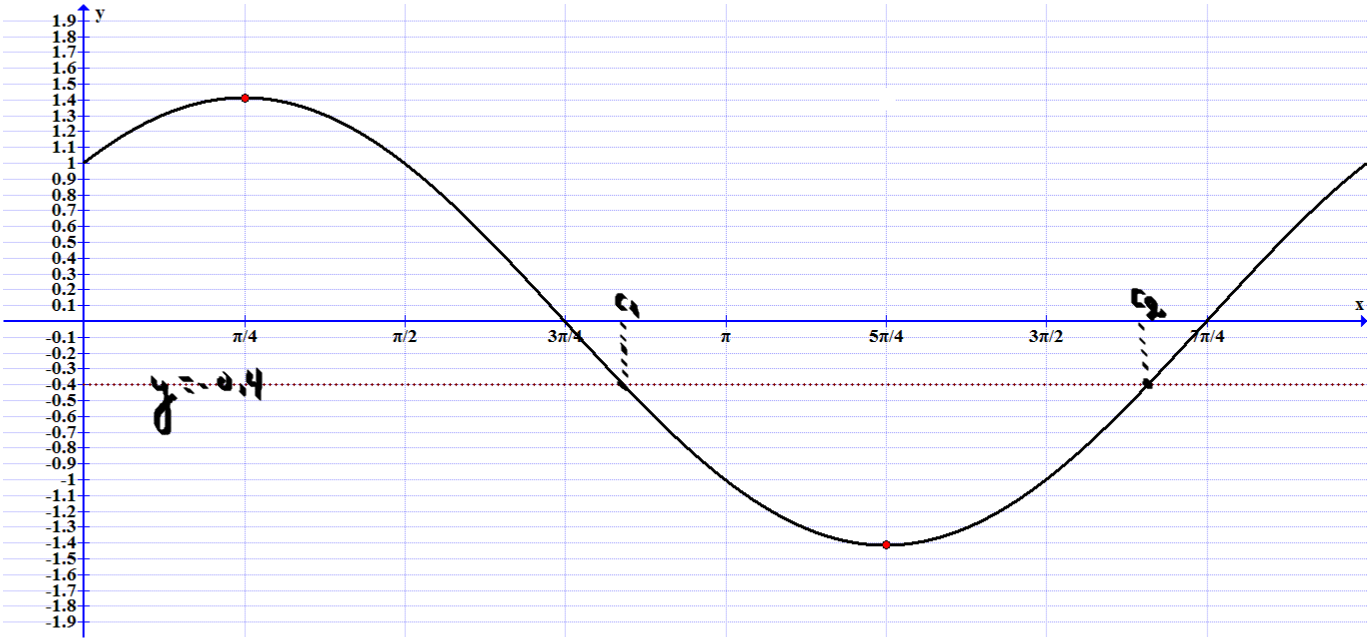
Illustration 11 :
Observons une fois de plus la représentation graphique de la fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ sur $[0, 2\pi[$



Il s'agit d'une fonction continue sur $[0, 2\pi[$ et dont les valeurs extrêmes sur cet intervalle sont $f_{min} = -\sqrt{2}$ et $f_{max} = +\sqrt{2}$.

Le théorème 2.6.2 implique dans ce cas que pour toute valeur $k \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, l'équation $f(x) = k$ c'est-à-dire $\cos x + \sin x = k$ admet au moins une solution réelle $c \in [0, 2\pi[$.

A titre illustratif, en considérant $k = -0.4 \in k \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, il suffit de tracer la droite horizontale $y = -0.4$ pour *voir* que l'équation $\cos x + \sin x = -0.4$ admet au moins une solution (exactement deux, c_1 et c_2 pour ce cas) conformément au théorème 2.6.2.



Lorsque la valeur k du théorème 2.6.2 est nulle, on obtient la version suivante du même résultat :

þ :

Si f est continue sur $I = [a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont des signes contraires, alors il existe au moins $c \in I$ telle que $f(c) = 0$.

A titre d'exemple, la fonction $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 2$ est définie et continue sur $I = [0, 2]$. Comme $f(0) = 2 \geq 0$ et $f(2) \leq 0$ alors l'équation $-2x^3 + x^2 - x + 2 = 0$ admet au moins une solution c telle que $0 \leq c \leq 2$.

Le but des théorèmes des valeurs intermédiaires étant principalement la préparation à la résolution approchée par des machines des équations de la forme $f(x) = k$ pour une fonction continue quelconque f, les théorèmes 2.6.2 et 2.6.2 possèdent la principale lacune suivante : **il permettent de postuler l'existence d'au moins une solution sur un intervalle et ne permettent donc pas de déterminer le nombre exact de**

solutions d'une équation de la forme $f(x) = k$.

Pour y arriver, il est nécessaire d'utiliser le résultat suivant :

þ Si une fonction f est continue et **monotone** sur un intervalle $I = [a, b]$ et si $m\,(x_1, f(x_1))$ et $M\,(x_2, f(x_2))$ sont respectivement le minimum et le maximum locaux de la fonction f sur l'intervalle $I = [a, b]$ alors pour toute valeur $y \in [f(x_1), f(x_2)]$ (c'est-à-dire y est compris entre le minimum et le maximum de f sur $I = [a, b]$) il existe **exactement** une valeur $c \in I$ telle que $f(c) = y$.

þ Si f est continue et monotone sur $I = [a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont des signes contraires, alors il existe exactement $c \in I$ telle que $f(c) = 0$.

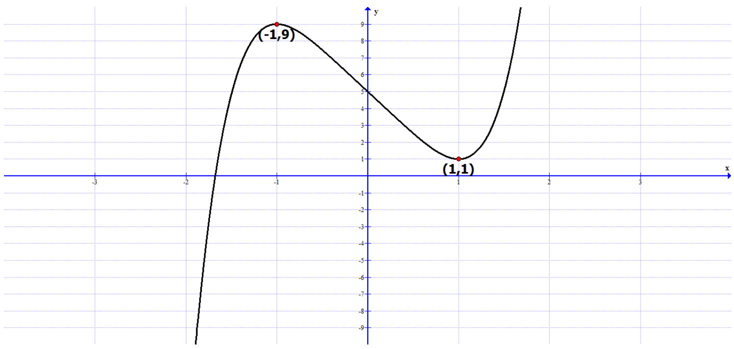
2.6.3 Quelques exercices d'application

Illustration 12 *:*
Combien l'équation $x^5 - 5x + 5 = 0$ *admet-elle de solution(s) ?*

Eléments de Corrigé :

$$f^{'}(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

Comme $5(x^2+1) > 0$ alors les signes de la dérivée sont ceux de x^2-1 qui est positif dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et négatif dans $]-1, 1[$



Les intervalles de monotonie sont $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$

1. Sur $I_1 =]-\infty, -1[$ la fonction change de signe (passe de $-\infty$ à 9). D'après le théorème 2.6.2, l'équation $x^5 - 5x + 5 = 0$ y admet une seule solution $cc \in I_1$
2. Comme sur $I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$ la fonction f ne change pas de signe, alors l'équation $f(x) = k$ n'y admet aucune solution.

Au total l'équation $x^5 - 5x + 5 = 0$ admet exactement une seule solution $c \in I_1$
On peut préciser davantage la localisation de cette solution unique en remarquant sur la courbe que f change de signe entre -2 et -1.
En effet, $f(-2) = (-2)^5 - 5 \times (-2) + 5 = 17 > 0$ alors que $f(-1) = 9$. On en déduit finalement que l'équation $x^5 - 5x + 5 = 0$ admet exactement une seule solution $c \in]-2, -1[$

Illustration 13 *:*
Déterminer le nombre de solution de l'équation $x\sqrt{1+x} = \frac{-1}{4}$

Illustration 14 *:*
Même question sur l'équation $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 0.8$ *sur* $[0, 2\pi[$

`Indication` : cette équation admet exactement 4 solutions x_1, x_2, x_3 et x_4 avec $0 < x_1 < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < x_2 < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x_3 < \pi$ et $\frac{3\pi}{2} < x_4 < 2\pi$

Illustration 15 *Déterminer le nombre de solutions de l'équation* $f(x) = \frac{x}{x^4+3} = \frac{1}{5}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Remarque 13 *:*
La démarche précédente nous permet, de manière satisfaisante, de déterminer et de localiser le plus finement possible, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ *mais ne nous permet pas de trouver la valeur approchée de ces solutions.*
De nombreuses ***méthodes numériques*** *existent à cet effet mais leur étude sort du simple cadre de ce cours.*

Chapitre 3

Fonctions exponentielles et logarithmiques

3.1 Quelques rappels choisis

3.1.1 Logarithmes

Définition 26 *:*
Soit a un nombre réel strictement positif.
On appelle logarithme d'un réel x dans la base a, le nombre réel noté $\log_a x$ et défini par la relation :

$$\log_a x = y \quad ssi \quad a^y = x$$

En d'autres termes, $\log_a x$ est l'exposant que porte une puissance de base a dont la valeur est x .

Exemple 10 *:*
$\log_2 8 = 3, \quad \log_5 125 = 3, \quad \log_9 3 = 0.5, \quad \log_3 81 = 4 \quad \log_7 1 = 0 \cdots$

Remarque 14 *:*
Lorsque la base vaut 10*, on parle de logarithme décimal et on écrit tout simplement* $\log x$ *au lieu de* $\log_{10} x$

Propriétés élémentaires des logarithmes

1. $\forall a \in \mathbb{R}_+^\star$, $\log_a(x)$ existe ssi $x > 0$
   (a) Les nombres négatifs n'ont pas de logarithme. C'est ainsi que, par exemple, l'expression $\log_5(-4)$ est dénuée de sens
2. $\forall x, y > 0$, $\log_a(x.y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et si $y \neq 0$ on a $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\forall n \in \mathbb{R}, \quad \log_a(x^n) = n\log(x)$
4. $\log_a(x) = \log(y) \Rightarrow x = y$ (en d'autres termes la fonction $f(x) = \log_a(x)$ est injective).

Quelques exemples d'illustration des propriétés

1. Résoudre chacune des équations suivantes :

   (a) $\log[x(x-2)] = 0$

i. `Indication de réponses:` $S = \left\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right\}$

(b) $\log_2(x+3) = 1$

i. `Indication de réponses:` $S = \{-1\}$

(c) $\log x + \log(x+5) = 2\log 2$

i. `Indication de réponses:` $S = \left\{\frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right\}$

(d) $\log(x^2-1) = 2\log(x-3)$

i. `Indication de réponses:` $S = \emptyset$

2. Un capital de 10 000 $ est placé à intérêts composés au taux de 5% par an.
   (a) Quel sera ce capital après 10 ans ?
   (b) Dans combien d'années ce capital doublera-t-il ?

   i. `Indication de réponses:` $14,27 \approx 15ans$

Problème 4 *:*
Il arrive qu'en calculant des logarithmes, il se pose le besoin de pouvoir passer d'une base à une autre. Comment procéder ?

Solution : il suffit pour cela d'utiliser la formule de changement de base. On démontre à cet effet que pour deux nombres réels a et b strictement positif et $\forall x \in \mathbb{R}^+$:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Illustration 16 *Résolvons l'équation* $\log_3(x+1) + \log_9(x-2) = \log_9(x^2-1)$

Les contraintes sur l'inconnue sont :

$x+1>0$ et $x-2>0$ et $x^2-1>0$ et il est évident qu'elles se résument en $x>2$

Ainsi pour cette équation, l'ensemble des solutions admissibles est $E =]2, +\infty[$

$\log_3(x+1) + \log_9(x-2) = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow \frac{\log_9(x+1)}{\log_9 3} + \log_9(x-2) = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow \frac{\log_9(x+1)}{\frac{1}{2}} + \log_9(x-2) = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow 2\log_9(x+1) + \log_9(x-2) = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow \log_9(x+1)^2 + \log_9(x-2) = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow \log_9\left[(x+1)^2(x-2)\right] = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow (x+1)^2(x-2) = (x^2-1) \Rightarrow (x+1)(x-2) = (x-1)$

$\Rightarrow x^2-2x-1 \Rightarrow S\left\{1+\sqrt{2}\right\}$

3.1.2 Courbes et dérivées des fonctions réciproques

Il est établi que si f est une bijection de I vers J telle que pour $a \in I, f(a) = b$, sa réciproque f^{-1} est définie de Jvers I telle que $f^{-1}(b) = a$.

Ainsi par exemple, $f(x) = x^2$ est une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ et sa réciproque est la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ définie de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$.

En représentant f et g dans un repère orthonormé ainsi que la première bissectrice des axes on obtient :

Nous remarquons que les courbes représentatives respectives de f et g sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.

Cette propriété est générale : **les courbes représentatives de deux fonctions réciproques respectives sont toujours symétriques par rapport à la droite** $y = x$.

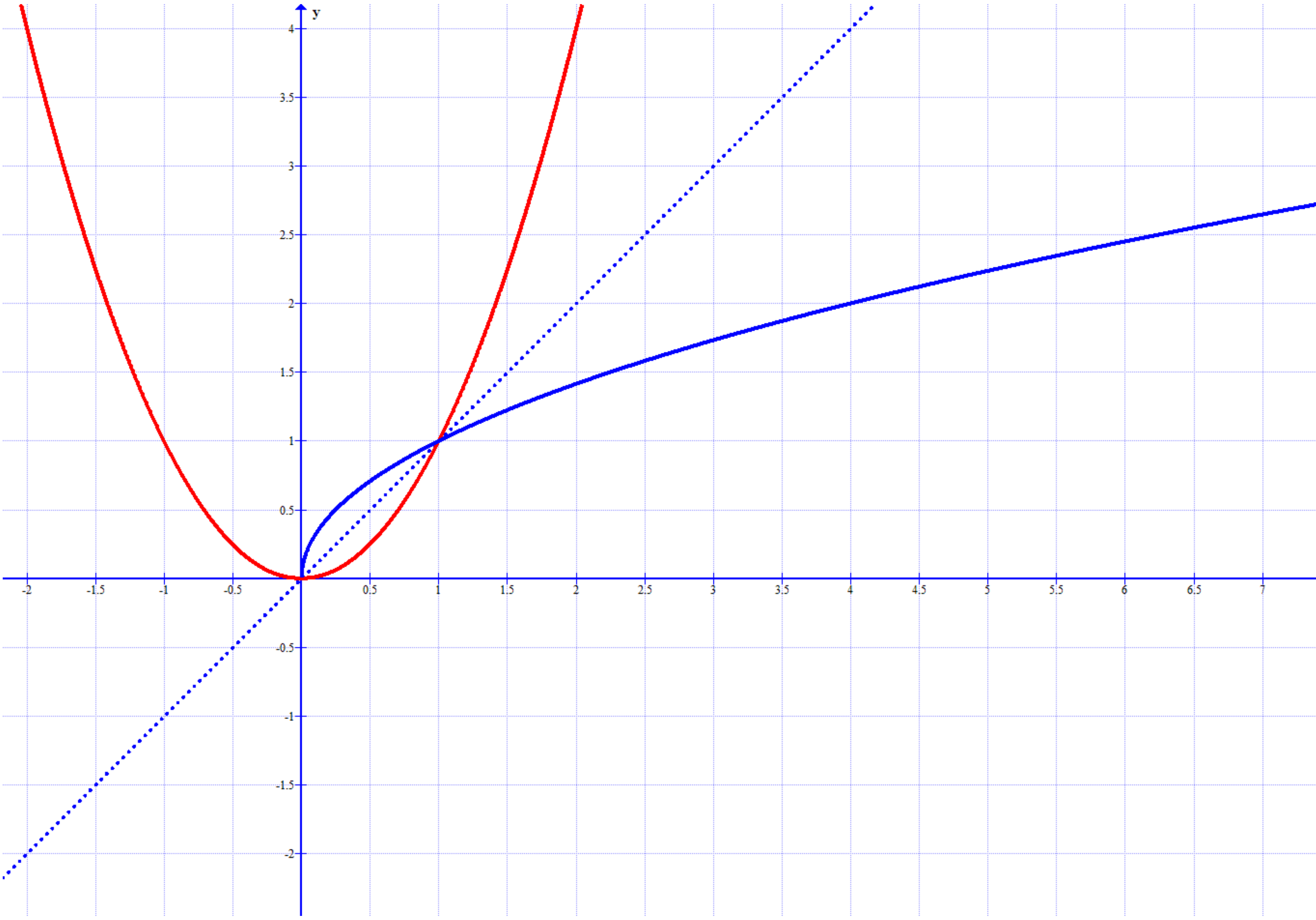
Pour ce qui est de la dérivée, on démontre que si f est une bijection alors la dérivée de sa réciproque f^{-1} est égale à l'inverse de la dérivée de la fonction directe sous réserve d'interchanger le rôle des variables :

$$\left[f^{-1}\right]_x' = \frac{1}{[f]_y'} \tag{3.1}$$

3.2 Allure des courbes $y = a^x$ et $y = \log_a(x)$

La relation $\log_a(x) = y \Rightarrow a^y = x$ signifie clairement que la fonction exponentielle de base a et la fonction logarithmique de même base sont réciproques l'une de l'autre.
Dans un premier temps nous allons, d'une manière intuitive dégager l'allure générale des courbes de ces deux importantes fonctions.

Pour cela il faut distinguer le cas $a > 1$ du cas $0 < a < 1$ qui conduisent chacun, comme on le verra par la suite, à des fonctions aux propriétés opposées en ce qui concerne le sens de variation.



3.2.1 Fonctions exponentielle et logarithmique de base a avec $a > 1$ (ex : $a = 10$)

Pour la fonction $f(x) = 10^x$ il est évident qu'elle est définie sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$.

Il convient aussi de remarquer que cette fonction est monotone croissante étant donné que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \geq x_2 \Rightarrow 10^{x_1} \geq 10^{x_2}$.

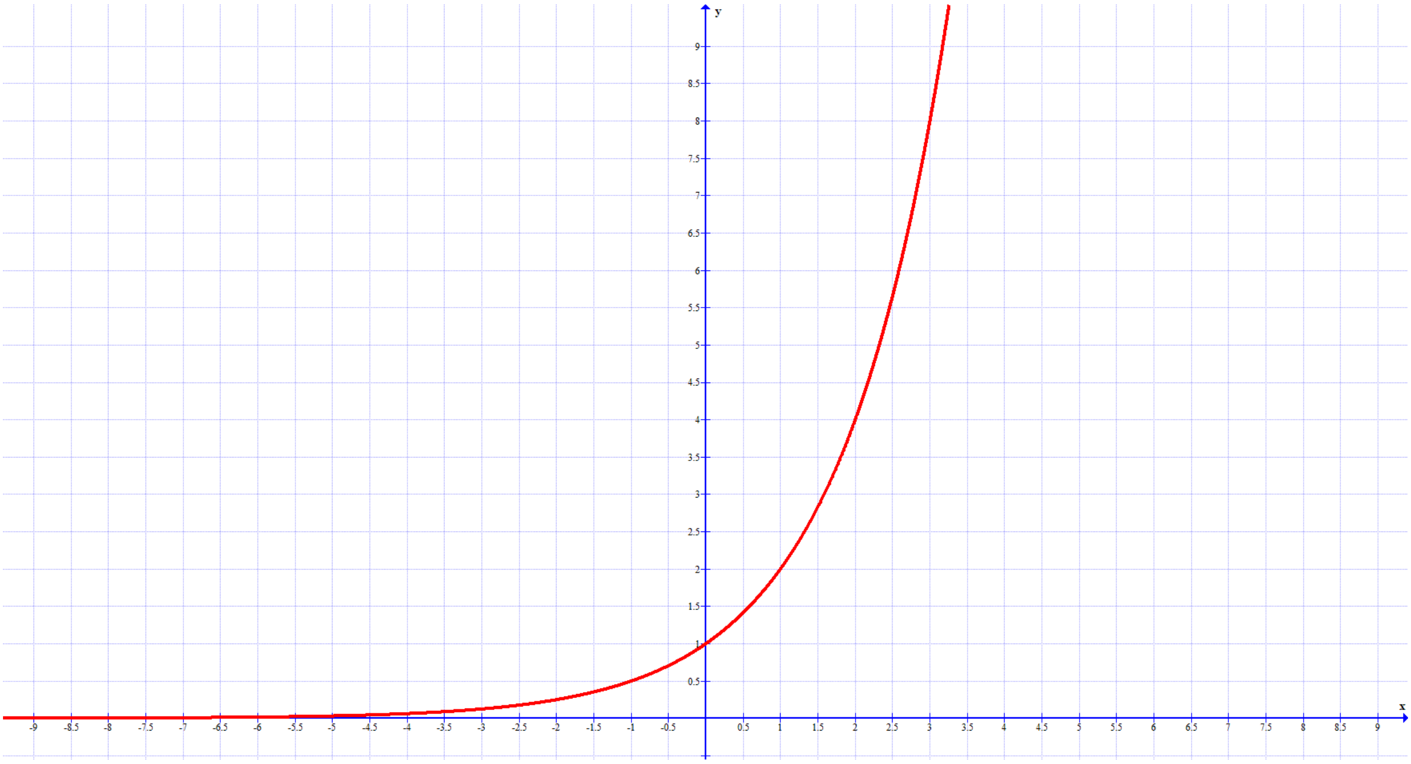
L'inégalité $10^x \geq x$ implique que $\lim_{x\to+\infty} 10^x = +\infty$ et par conséquent (en faisant le changement de variable $x = -t$) on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} 10^x = \lim_{t\to+\infty} 10^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{10^t} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

En bref, la fonction $f(x) = 10^x$ est définie et croissante sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ avec comme limites aux bornes :

$$\lim_{x\to-\infty} 10^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 10^x = +\infty$$

Il en résulte alors que sa courbe représentative est entièrement au-dessus de l'axe des abscisses qui est en fait une asymptote horizontale à cette courbe du côté gauche :



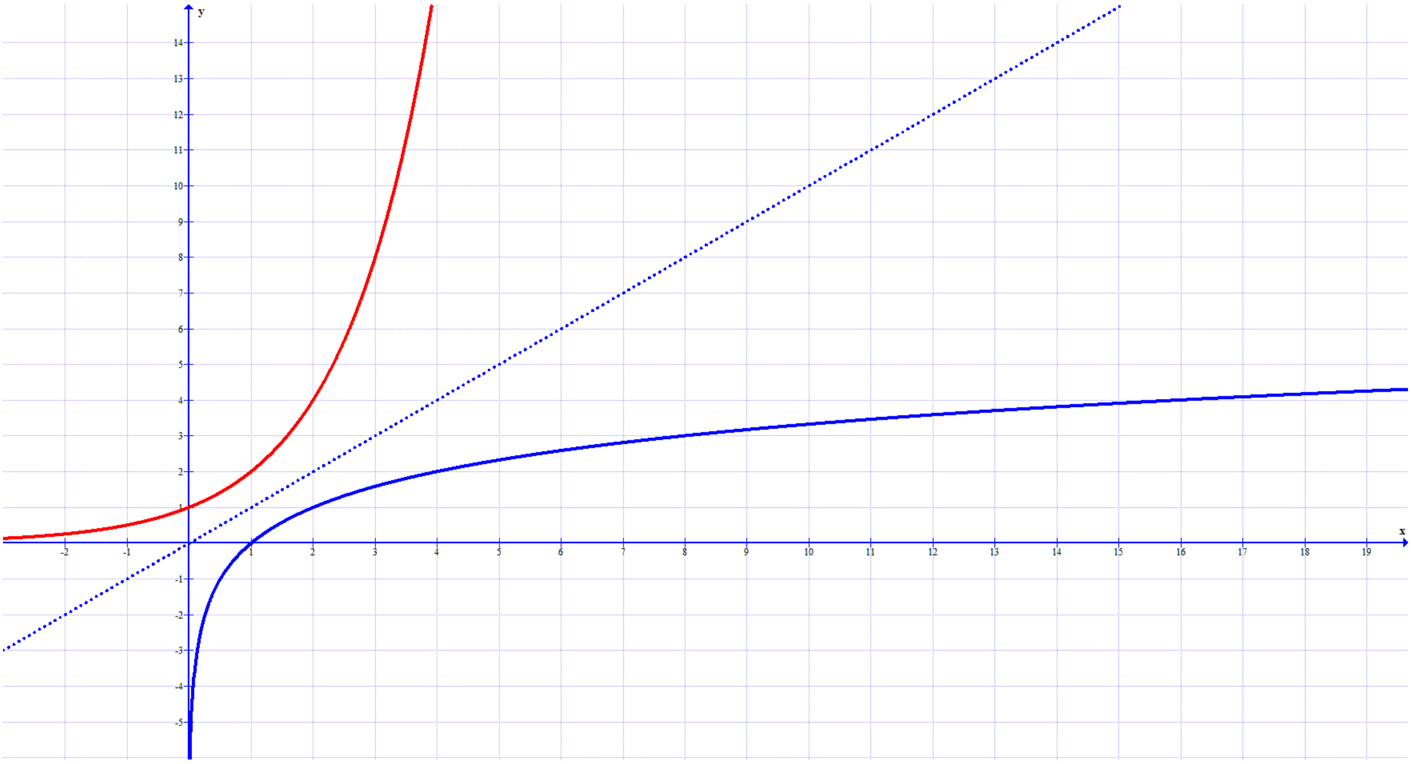
La réciprocité de $f(x) = 10^x$ et $g(x) = \log(x)$ nous permet directement d'obtenir les propriétés de la fonction logarithme décimal en vertu des rappels ci-dessus :

Il résulte de cette représentation graphique que la fonction $f(x) = \log(x)$ est définie dans $]0, +\infty[$, y est croissante et en termes de limites aux bornes on a :

$$\lim_{x\to0^+} \log(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$$

De manière générale, pour $a > 1$, les fonctions $f(x) = a^x$ et $g(x) = \log_a(x)$ sont croissantes, la première sur $\mathbb{R}$ et la seconde sur $\mathbb{R}_+^\star$ et on a d'une part :

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$



D'autre part on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = +\infty$$

3.2.2 Fonctions exponentielle et logarithmique de base a avec $0 < a < 1$ (ex : $a = 0.5$)

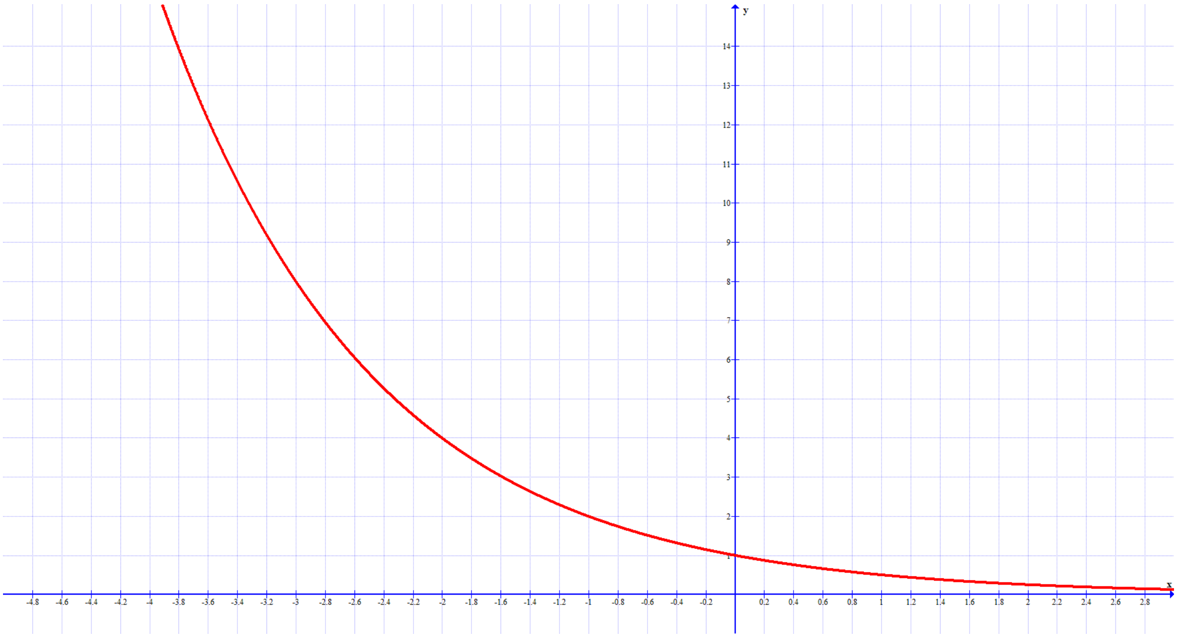
Pour la fonction $f(x) = 0.5^x$ il convient de remarquer qu'elle est définie sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$ et la relation $x_1 \geq x_2 \Rightarrow 0.5^{x_1} \leq 0.5^{x_2}$ implique qu'il s'agit d'une fonction décroissante.

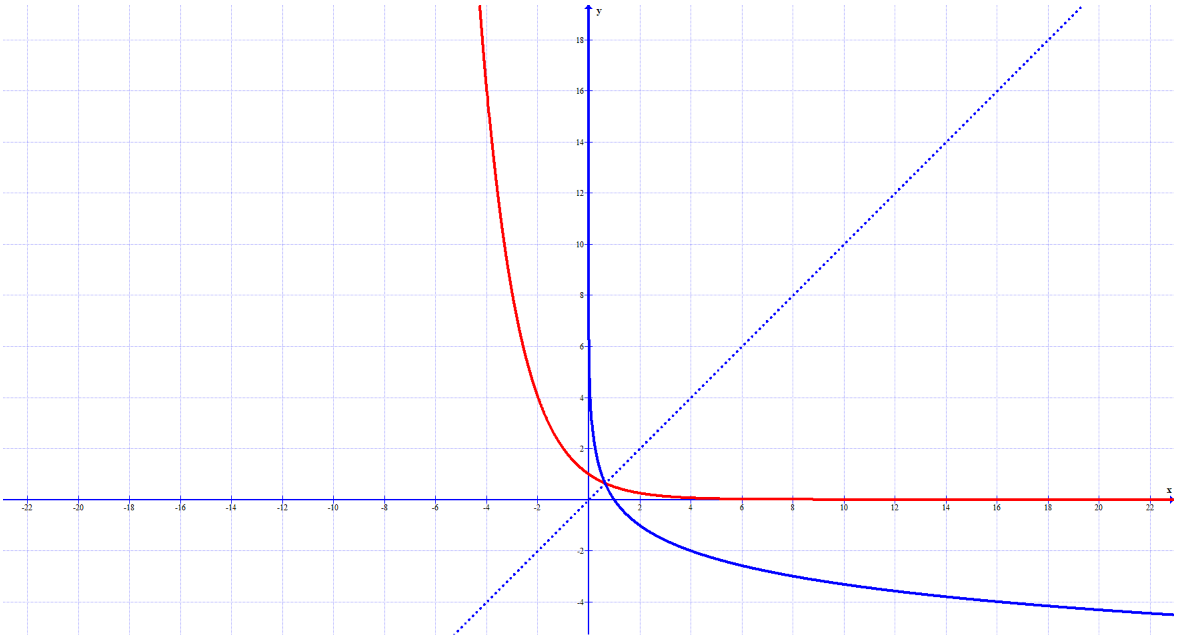
Il résulte de cette représentation graphique, en termes des limites aux bornes, que :

$$\lim_{x\to -\infty} (0.5)^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} (0.5)^x = 0$$

En utilisant les propriétés de réciprocités, on peut déduire de ce graphique les propriétés de $g(x) = \log_{0.5}(x) = \frac{\log(x)}{\log(0.5)}$:

Il résulte, sans surprise, de ce graphique que la fonction logarithmique de base $a = 0.5$ est une fonction





décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et en termes des limites aux bornes nous avons :

$$\lim_{x\to 0^+} \log_{0.5}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \log_{0.5}(x) = -\infty$$

3.3 Fonction exponentielle népérienne

Pour divers modèle de croissance il se pose le besoin de fonctions f qui sont telles que $f^{'}(x) = kf(x)$. Bien entendu le cas le plus simple correspondra au cas $k = 1$.

Définition 27 *il existe une seule fonction f vérifiant la relation $f^{'}(x) = f(x)$ avec $f(0) = 1$. On l'appelle* ***fonction exponentielle népérienne*** *et son expression mathématique est $f(x) = e^x$ où la base spéciale e est définie par l'expression :*

$$e = \lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

Définition 28 *On appelle logarithme népérien le logarithme en base e . Ce logarithme spécial se note* $\ln(x)$ *au lieu de* $\log_e(x)$ *.*

Pour dégager les propriétés de ces fonctions, il nous suffit de trouver la valeur approchée de e .

Considérons la fonction g définie par $g(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

Pour trouver une valeur approchée de e , il suffit de donner à x des valeurs successivement proches de 0 et *voir* de quelle valeur $g(x)$ s'approche progressivement.

x	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$g(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$	2.25	2.5937	2.7048	2.7169	2.7181	2.7183

Il ressort de ce tableau qu'à mesure que la variable x s'approche de zéro, la quantité $g(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ s'approche approximativement de 2.718..

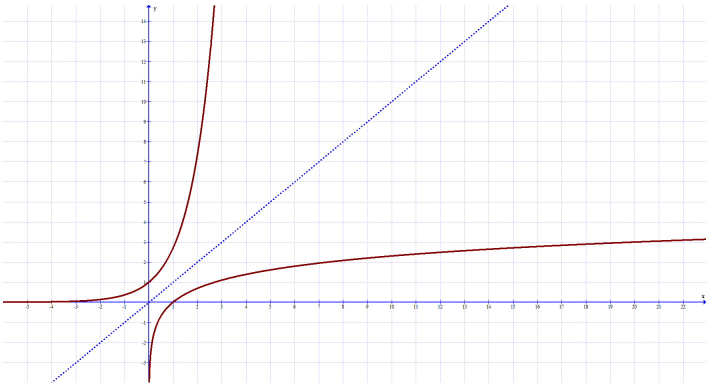
Symboliquement on écrit

$$e = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} \approx 2.72$$

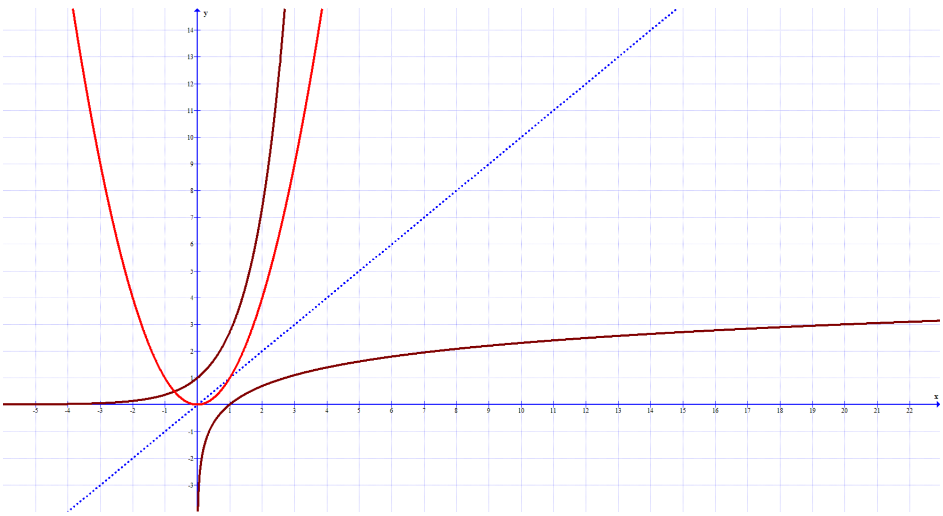
Comme la base du logarithme népérien est supérieure à il en résulte les propriétés suivantes sur les fonctions exponentielle et logarithmique népériennes :

1. La fonction $f_1(x) = e^x$ est définie et croissante sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction $f_2(x) = \ln(x)$ est définie et croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Leurs courbes représentatives respectives sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes :
3. En termes des limites aux bornes on a les relations suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$



4. De manière générale on établit que la dérivée de la fonction réciproque f^{-1} s'obtient à partir de celle de f par la relation :
$$(f^{-1})'_x = \frac{1}{(f)'_y}$$
D'une part, $(e^x)' = e^x$ et d'autre part $g(x) = \ln(x)$ est la réciproque de $f(x) = e^x$. Il en résulte que :
$$(\ln(x))' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$
En considérant la formule de dérivation des fonctions composées $(f(u(x)))' = f'(u).u'(x)$ on résume les formules de dérivation suivante :
$$(e^x)' = e^x, \quad \left(e^{u(x)}\right)' = [u(x)]'.e^{u(x)}, \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}, \quad (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
5. En observant de nouveau les graphiques :



On remarque certes que les fonctions $f(x) = e^x$, $g(x) = x$ et $g(x) = \ln(x)$ sont toutes croissantes mais il est évident que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$,$\ln(x) < x < e^x$. On démontre même que $\forall n \in \mathbb{R}$, $\ln(x) < x^n < e^x$.

Il découle de cette inégalité les limites classiques suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$$

3.4 Première série d'exercices

1. Résolvons chacune des équations suivantes :
   (a) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
      i. `Indication de solution` : $S = \{0\}$
   (b) $e^{x^2+8} = e^{2x}$
      i. `Indication de solution` : $S = \{\}$
2. Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = e^{x^2}$
   (b) $f(x) = x^2e^x$
   (c) $f(x) = \ln(-2x + 4)$
   (d) $f(x) = \ln(\cos x)$
3. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x+2}$, `Indication de solution` : e
   (b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{3x+1}$, `Indication de solution` : e^{-3}
   (c) $\lim_{x\to0} \frac{x}{e^x-1}$, `Indication de solution` : 1
4. Etudier la variation de la fonction $f(x) = xe^x$

   Corrigé :

   Le domaine de définition est évidemment $\mathbb{R}$

   $$f^{'}(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$$

   Comme la quantité e^x est strictement positive, alors les signes de cette dérivée ne dépendent que de $1 + x$ dont il est clair qu'elle est positive à droite de -1 et négative à gauche.
   Il en résulte que la fonction f est décroissante à gauche de -1 et croissante à droite.
   Les limites aux bornes sont :

   $$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$$

   Par ailleurs, le minimum est atteint à $x = -1$ et vaut $f_{min} = f(-1) = \frac{1}{e}$

3.5 Problèmes d'applications sur les fonctions exponentielles et logarithmiques

Problème 5 *D'après les données statistique de Mai 1997, le taux d'équipement des français en téléphones mobiles semble pouvoir être calculé à l'aide de la formule*

$$f(t) = \frac{20}{1 + k^{-at}}$$

Dans cette expression, $f(t)$ est exprimé en pourcentage et t en années , la date 0 étant fixée à la fin 1995. Les réels k et a sont à déterminer.

1. *Sachant que le taux était de 2.4% à la fin 1995 et de 4.3% à la fin 1996, déterminer les réels k et a. Donnez-en une valeur approchée à 10^{-1} près qu'on utilisera par la suite.*
   (a) *Vérifier la prévision faite alors, pour fin 1997, d'un taux voisin de 7%*
   (b) *Donner une valeur arrondie à 10^{-1} près du taux prévisionnel pour la fin 2000 et la fin 2005.*
2. *En considérant la fonction f obtenue,*
   (a) *Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.*
   (b) *En déduire au cours de quelle année ce taux dépassera 15%*
   (c) *Déterminer la limite de f en $+\infty$. En donner une interprétation économique et estimer la pertinence à long terme de la formule obtenue. .*

Problème 6

1. *Considérons la fonction f définie sur $[0; 2.1]$ par :*

$$f(x) = 3 + (x - 2)e^x$$

   (a) *Etablir le tableau de variation de f et en déduire ses signes.*
2. *Considérons la fonction F définie sur $[0; 2.1]$ par :*

$$F(x) = 3x + 3 + (x - 3)e^x$$

   (a) *Utiliser les résultats de la partie 1 pour établir la variation de F*
3. ***Application*** *: Un laboratoire fabrique un produit pharmaceutique et sa capacité de production ne peut pas excéder 2.1 tonnes de produit. On note x la masse, en tonnes, de produit fabriqué.*

   Une étude a montré que le coût de fabrication en millions d'euros, de x tonnes de produit est égal à $F(x)$, F étant la fonction définie dans la partie 2.

   Si l'on note k le prix de vente, en millions d'euros, d'une tonne de produit, il est évident que $P(x) = kx - F(x)$ donne le profit (ou la perte), en millions d'euros, réalisé(e) après la fabrication et la vente de x tonnes de produit.
   Considérons $k = 3$.

   (a) *Si vous étiez responsable de ce laboratoire, combien produiriez-vous de tonnes pour réaliser un profit maximal ?*

3.6 Complément théorique sur les fonctions exponentielles et logarithmiques

Notons que s'agissant de la dérivation des fonctions exponentielles et logarithmiques de base quelconque il est avantageux de passer par la base e .

Ainsi, pour dériver l'expression a^x il suffit de remarquer que $a^x = e^{a^x} = e^{x \ln a}$ de sorte qu'en appliquant la formule $(e^u)' = u' e^u$ on obtient :

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln(a) e^{x \ln a} = \ln a (a^x)$$

Ainsi,

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \text{et} \quad (a^u)' = u' a^u \ln a$$

Illustration 17 $(3^x)' = 3^x \ln 3$

Quant à la dérivée de $g(x) = \log_a(x)$, la formule de changement de base donne :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Qu'arrive-t-il si la base est elle-même une fonction ?

Soient u et v deux fonctions. Cherchons l'expression de la dérivée de u^v :
Soit $y = u^v \Rightarrow \ln y = v \ln u$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{uv' \ln u + vu'}{u}$

$\Rightarrow y' = y\frac{uv' \ln u + vu'}{u}$

En remplaçant y par u^v on obtient en définitive :

$$(u^v)' = u^v \left(\frac{uv' \ln u + vu'}{u}\right)$$

Illustration 18 *Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = x^x \quad f_2(x) = (2x)^{3x} \quad f_3(x) = (\cos x)^{\sin x}$$

Problème 7 *Le nombre d'habitants d'une région ayant un fort taux de natalité est donné par la fonction exponentielle $f(t) = 12.e^{0.05.t}$ où $f(t)$ est la population exprimée en millions d'habitants pour l'année $1990 + t$.*

1. *A partir de quelle année cette population aura-t-elle plus que triplé(si cette croissance se maintient) ?*
2. *Cette région ne peut pas nourrir plus de 20 millions de personnes. Pendant combien d'années après 1990 la nourriture sera-t-elle suffisante ?*

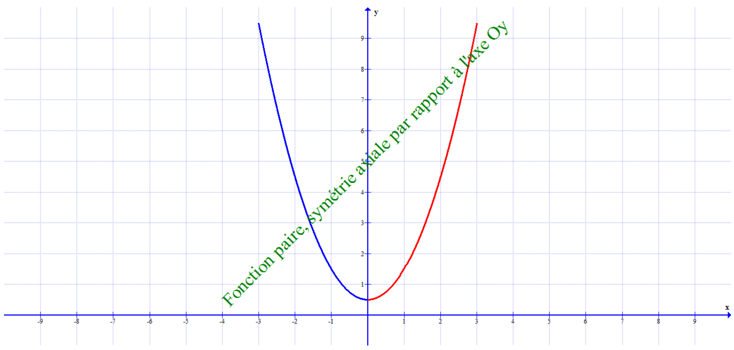
Notes de lecture :Fonctions hyperboliques

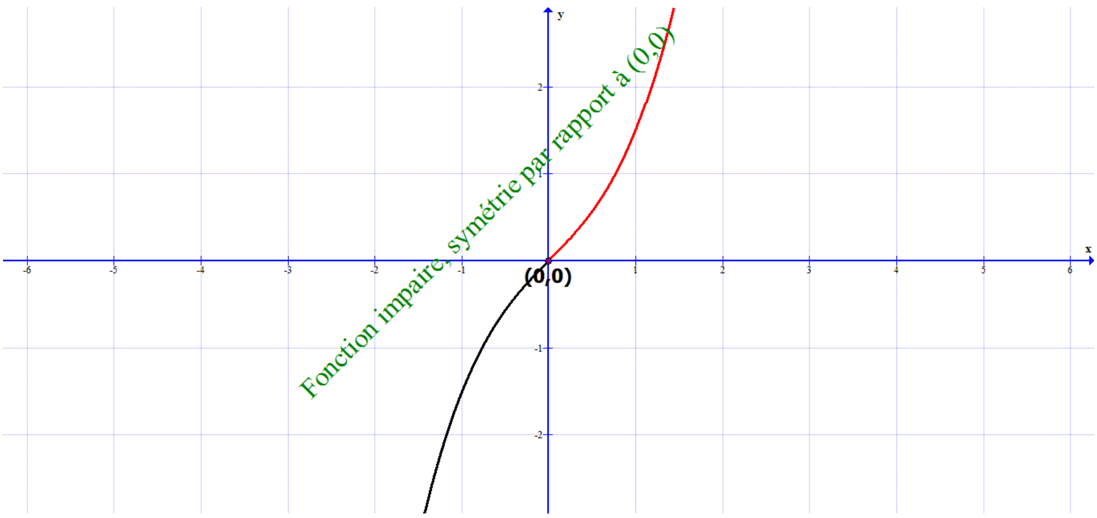
3.6.1 Rappel

Considérons f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur un autre domaine symétrique par rapport à l'origine des axes).

La fonction f est dite
— **paire** si $\forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x)$
— **impaire** si $\forall x \in D_f, \quad f(-x) = -f(x)$

Il est établi que lorsque le plan est rapporté à un repère orthonormé (ce qui est généralement le cas),la courbe représentative de toute fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Oy alors que celle représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine des axes.





Le résultat élémentaire suivant, établit la manière dont toute fonction se décompose en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

Proposition 17 *Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$(ou sur tout autre domaine de définition D_f symétrique par rapport à l'origine), il existe un couple unique (f_p, f_i) composée d'une fonction paire f_p et d'une fonction impaire f_i tel que $\forall x \in D_f$ on ait $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$.*

Preuve :

1. **Existence** :

   Pour toute foncction f, considérons associons-lui deux fonctions f_p et f_i définies $\forall x \in D_f$ par

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{3.2}$$

   (a) D'une part, $\forall x \in D_f$,

$$\begin{aligned} f_p(-x) &= \frac{f(-x) + f[-(-x)]}{2} \\ &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ &= f_p(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i(-x) &= \frac{f(-x) - f[-(-x)]}{2} \\ &= \frac{f(-x) - f(x)}{2} \\ &= -\frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= -f_i(x) \end{aligned}$$

   Comme $f_p(-x) = f_p(x)$ et $f_i(-x) = -f_i(x)$, $\forall x \in D_f$ alors les fonctions f_p et f_i définies par la relation 3.2 sont respectivement paire et impaire.

   (b) D'autre part,

$$\begin{aligned} f_p(x) + f_i(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= \frac{2f(x)}{2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   Il existe donc une fonction paire f_p et une fonction impaire f_i telles que $\forall x \in D_f$ on ait, $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$.

2. **Unicité**

   Considérons pour la fonction f donnée qu'il existe un autre couple (P, I) formé d'une fonction paire P et d'une fonction impaire I telles que $\forall x \in D_f$ on ait $f(x) = P(x) + I(x)$.
   Dans ce cas,

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + I(x) \\ f(-x) = P(-x) + I(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = P(x) + I(x) \\ f(-x) = P(x) - I(x) \end{cases} \tag{3.3}$$

   Il résulte de la relation 3.3 que

$$\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2P(x) \\ f(x) - f(-x) = 2I(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = f_p \\ I(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f_i \end{cases}$$

   De ce qui précède on déduit l'unicité des fonctions f_p et f_i définies par la relation 3.2 .

3.6.2 Décomposition de la fonction exponentielle e^x en fonctions hyperboliques

En appliquant la proposition 17 à la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ on en déduit qu'il existe une fonction paire f_p et une fonction impaire f_i telles que $\forall x \in \mathbb{R}$ on ait $e^x = f_p(x) + f_i(x)$.
D'après la relation 3.2, la fonction exponentielle génère une fonction paire f_p et une fonction impaire f_i respectivement définies par

$$f_p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ces fonctions ne sont pas que de simples combinaisons des fonctions exponentielles (e^x et e^{-x}). Elles jouent un important rôle en Analyse mathématique et sont qualifiées d'**hyperboliques**.

3.6.3 Sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

Définitions

Définition 29 *Considérons la fonction exponentielle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.*

1. *on appelle **fonction sinus hyperbolique** la fonction $sh\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

   .

2. *on appelle **fonction cosinus hyperbolique** la fonction $ch\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

   .

Propriétés

Propriété 1 : la fonction sinus hyperbolique est impaire alors que la fonction cosinus hyperbolique est paire.

En effet, ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$$

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Il résulte de la propriété 1 que la courbe représentative de la fonction sinus hyperbolique admet l'origine des axes comme centre de symétrie alors que celle de la fonction cosinus hyperbolique est symétrique par rapport à l'axe Oy.

Propriété 2 : les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont liées par la relation :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

En effet,

$$\begin{aligned} ch^2x - sh^2x &= (\cosh x - \sinh x)(\cosh x + \sinh x) \\ &= \left[\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} - \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right]\left[\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} + \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right] \\ &= e^{-x} \times e^{x} = 1 \end{aligned}$$

Remarque 15 *La relation 3.4 ci-dessus permet de justifier l'appellation* ***fonctions hyperboliques*** *que portent ces fonctions.*

En effet, par analogie avec les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ qui sont qualifiées de **circulaires** car il résulte de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ que tout point du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est paramétré par une variable $t \in \mathbb{R}$ de sorte que tout point M de ce cercle possède des coordonnées de la forme $M(\cos t, \sin t)$, considérons l'ensemble H défini par :

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\right\}$$

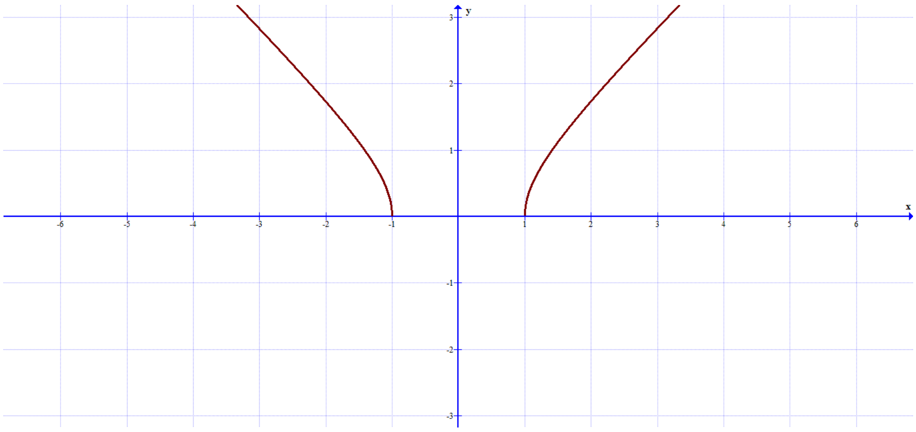
En explicitant y dans la relation $x^2 - y^2 = 1$ on a,

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

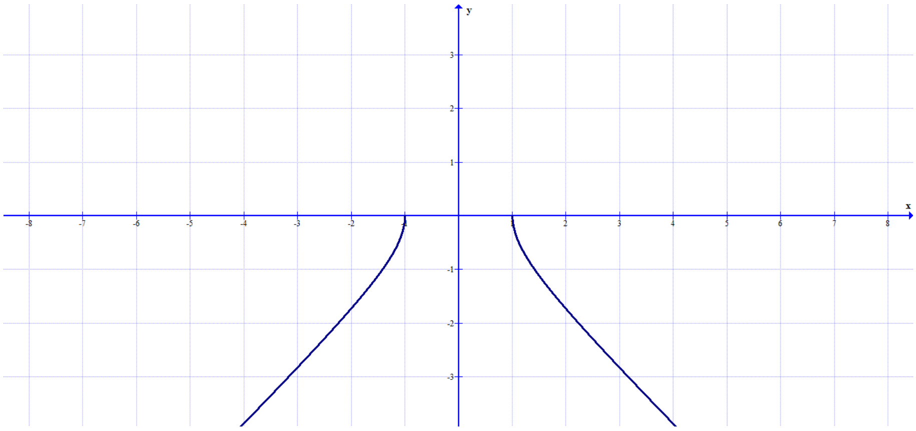
.

On en déduit que l'ensemble H est composé de deux branches $H_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = +\sqrt{x^2 - 1}\right\}$ et $H_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\sqrt{x^2 - 1}\right\}$

La représentation graphique de la branche 1 donne :



Celle de la branche2 donne :



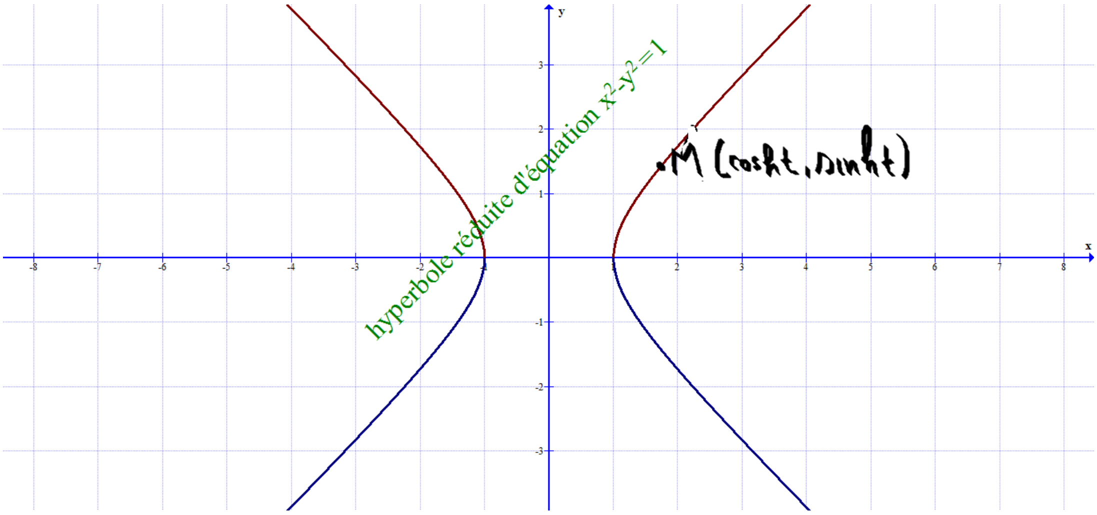
Pour obtenir une représentation visuelle de tout l'ensemble $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\right\}$ il suffit de représenter simultanément ses deux branches pour avoir :

Cette courbe (à deux branches ainsi obtenue) s'appelle **hyperbole**. Il résulte alors de la relation 3.4 ci-dessus que tout point mobile $M(x, y)$ de l'hyperbole peut être paramétré par $M(\cosh t, \sinh t)$.

En résumé, les épithètes *circulaires* (que portent cos et sin) et *hyperboliques*(que portent cosh et sinh) proviennent des faits suivants :

1. Le cercle centré à l'origine d'équation $x^2+y^2 = a^2$ est décrit par le système d'équations paramétriques

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}$$



2. L'hyperbole centrée à l'origine d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est décrite par le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

propriété 3 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{on a :} \quad \cosh x \geq 1$$

En effet,
— d'une part, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ entraine que $\cosh x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} > 0$
— d'autre part, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \geq 1$
Comme $\cosh x > 0$ et $\cosh^2 x \geq 1$ alors $\cosh x \geq 1$, ■

Propriété 4 : Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont dérivables et on a :

$$\cosh' x = \sinh \quad \text{et} \quad \sinh'(x) = \cosh x$$

En effet,

$$\sinh' x = \left[\frac{e^x - x^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$$

$$\cosh' x = \left[\frac{e^x + x^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right]' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x$$

Variation

1. **Cas de la fonction sinus hyperbolique :**

D'après la symétrie de cette fonction, nous pouvons limiter son étude sur $[0, +\infty[$ et déduire l'autre partie par `symétrie centrale` par rapport à l'origine des axes..

Comme $\sinh' x = \cosh x \geq 1 > 0$ alors la fonction sinus hyperbolique est monotone croissante.

Comme $\sinh 0 = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$ et $\sinh'(0) = \cosh 0 = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$ alors la tangente $T_{\sinh,0}$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_{\sinh}$ de la fonction sinus hyperbolique au point d'abscisse $x_0 = 0$ passe par $(0, \sinh 0) \equiv (0, 0)$ et a pour pente $m = \cosh 0 = 1$.

Il en résulte que l'équation de la tangente $T_{\sinh,0}$ est :

$$y - 0 = 1(x - 0)$$

Ainsi, la première bissectrice des axes ($y = x$) est la tangente à la courbe représentative de la fonction sinus hyperbolique au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Quelle est la position de la courbe $\mathcal{C}_{\sinh}$ par rapport à cette tangente ?.

La réponse à cette question s'obtient par l'étude des signes de la fonction $k(x) = \sinh x - x$:

$k'(x) = (\sinh x - x)' = \cosh x - 1 \geq 0$ car $\cosh x > 1$. La fonction $k(x) = \sinh x - x$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $k(0) = 0$ alors :

(a) $\sinh 0 - x \geq 0$ pour $x \geq 0$ et dans ce cas la courbe $\mathcal{C}_{\sinh}$ est au-dessus de la droite $y = x$.

(b) $\sinh 0 - x \leq 0$ pour $x \leq 0$ et dans ce cas la courbe $\mathcal{C}_{\sinh}$ est en-dessous de la droite $y = x$.

S'agissant des limites aux bornes,

$$\lim_{x\to+\infty \sinh x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \sinh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$$

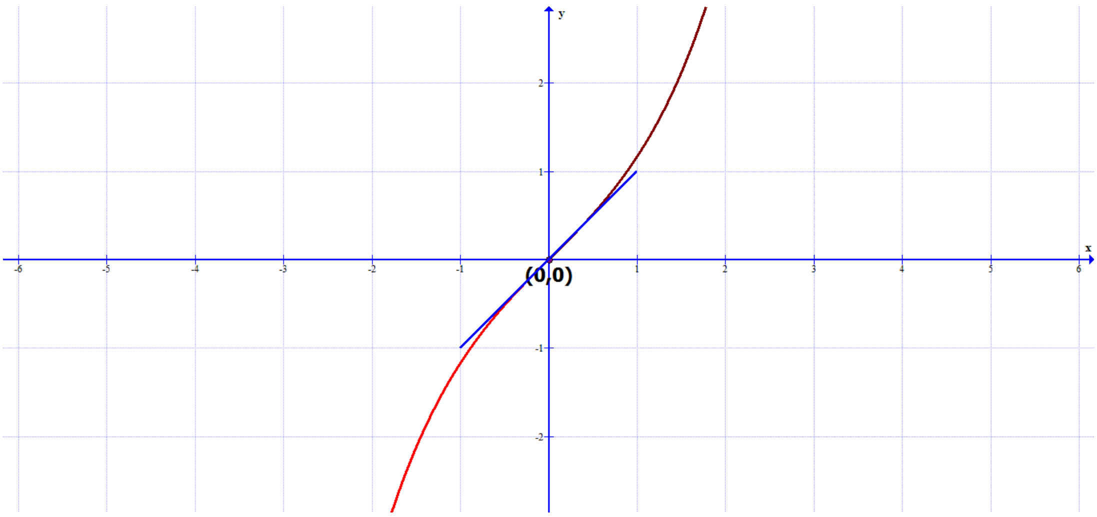
De tout ce qui précède, on déduit l'allure de la courbe suivante pour la fonction sinus hyperbolique.

Nous remarquons en particulier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh x \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \leq 0\text{si} & x \leq 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

2. **Fonction cosinus hyperbolique :**

Comme il s'agit d'une fonction paire on peut également l'étudier sur $[0, +\infty[$ et déduire l'autre partie par `symétrie axiale` par rapport à l'axe Oy.



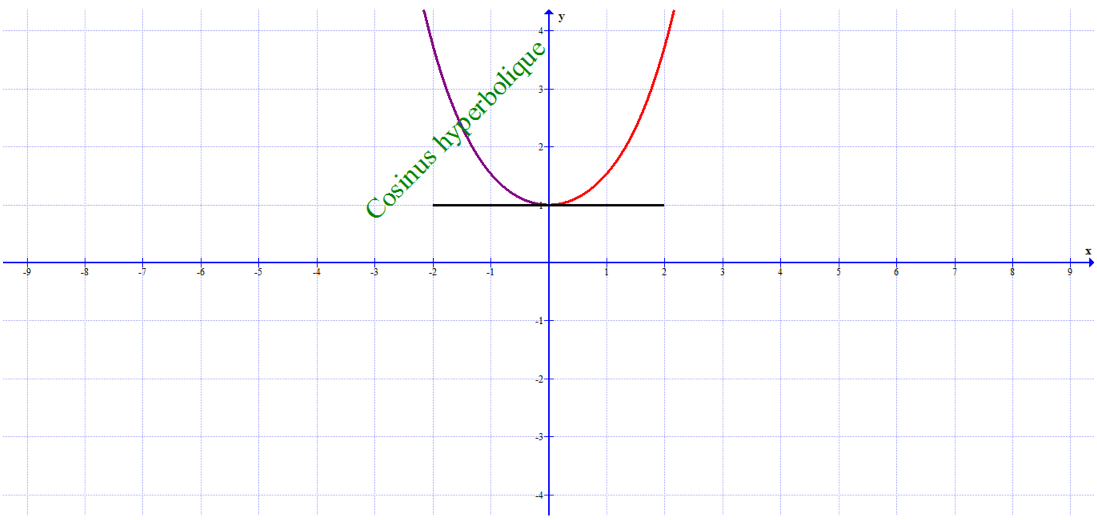
$$\cosh' x = \sinh x \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \leq 0 \text{si} & x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{voir la relation 3.5 ci-dessus.}$$

Ainsi, la fonction cosinus hyperbolique est croissante sur $[0, +\infty[$.

Comme $\cosh 0 = 1$ et $\cosh'(0) = \sinh 0 = 0$ alors la tangente $T_{\cosh,0}$ à la courbe représentative de la fonction cosinus hyperbolique a pour équation

$$y - \cosh 0 = \cosh'(0)(x - 0) \Rightarrow y = 1$$

Comme $\cosh x \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ alors le graphe de la fonction cosinus hyperbolique est entièrement au-dessus de la droite $y = 1$.



Il est évident que

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = \lim_{x\to-\infty} \sinh x = +\infty$$

Remarque 16 *Cette courbe représentative de la fonction cosinus hyperbolique s'appelle* ***chaînette****.*

3.6.4 Tangente hyperbolique

Définition et propriétés

Définition 30 *On appelle* ***tangente hyperbolique*** *la fonction* $\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie* $\forall x \in \mathbb{R}$ *par*

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Cette fonction, définie $\forall x \in \mathbb{R}$ étant donné que $\cosh x \neq 0$, possède les principales propriétés suivantes :

Propriété 1 : la fonction tangente hyperbolique est impaire.

Il s'agit, en effet, d'un quotient entre une fonction impaire (sinh) et une fonction paire (cosh). Il en résulte pour la courbe représentative $\mathcal{C}_{\tanh}$ de la tangente hyperbolique, une symétrie centrale par rapport à l'origine des axes.

Propriété 2 : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

En effet,

$$\begin{aligned} 1 - \tanh^2 x &= 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \end{aligned}$$

Propriété 3 : la fonction tangente hyperbolique est dérivable et on a :

$$\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \tanh' x &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' \\ &= \frac{\sinh' x \cosh x - \sinh x \cosh' x}{\cosh^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \end{aligned}$$

Variation

S'agissant d'une fonction impaire, on peut étudier sa variation sur $[0, +\infty[$ et en déduire le reste des propriétés par symétrie centrale par rapport à l'origine des axes.

Comme $\tanh^{'} x = \frac{1}{\cosh^2 x} \geq 0$ alors la fonction tangente hyperbolique est monotone croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme en plus $\tanh(0) = 0$ et $\tanh^{'}(0) = \frac{1}{\cosh^2(0)} = 1$ alors la tangente $T_{\tanh,0}$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_{\tanh}$ de la tangente hyperbolique au point d'abscisse zéro est :

$$y - 0 = 1.(x - 0)$$

La première bissectrice des axes ($y = x$) est doncc la tangente cherchée.

Pour établir les positions relatives entre $T_{\tanh,0}$ et $\mathcal{C}_{\tanh}$ il suffit d'étudier les signes de l'expression $g(x) = \tanh x - x$

$$\begin{aligned} g^{'}(x) &= \frac{1}{\cosh^2 x} - 1 \\ &= \frac{1 - \cosh^2 x}{\cosh^2 x} < 0 \quad \text{car} \quad \cosh^2 x \geq 1 \end{aligned}$$

La foction g est donc monotone décroissante. Comme en plus $g(0) = \tanh(0) - 0 = 0$ alors :

1. $g(x) \geq 0$ sur $]-\infty, 0[$ et par conséquent $\mathcal{C}_{\tanh}$ y est au-dessus de la tangente $T_{\tanh,0}$
2. $g(x) \leq 0$ sur $]0, +\infty, 0[$ et par conséquent $\mathcal{C}_{\tanh}$ y est en dessous de la tangente $T_{\tanh,0}$

Pour ce qui est des limites aux bornes, remarquons d'abord que

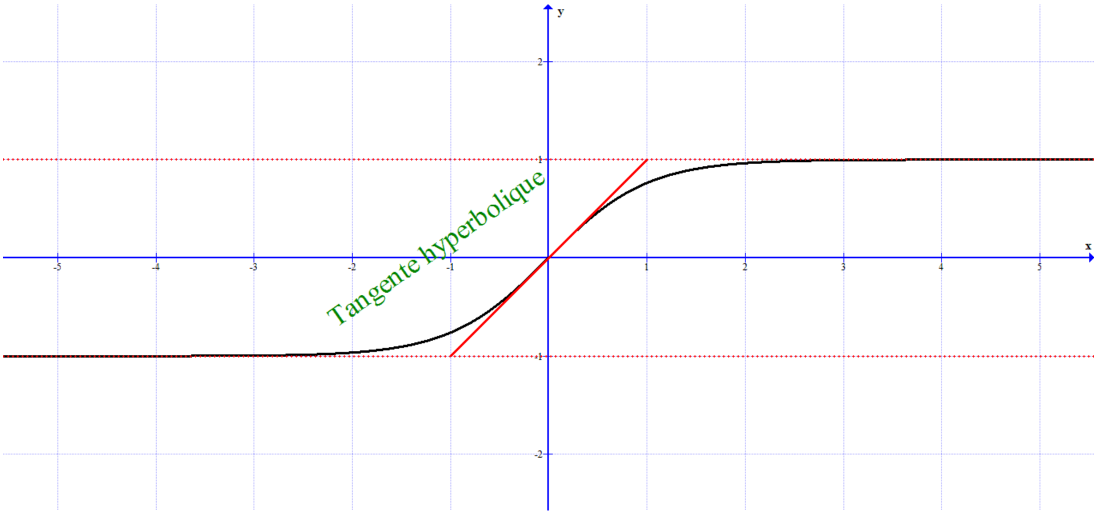
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$$

Il résulte de cette dernière relation que :

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \tanh x = -1$$

En définitive, la fonction tangente hyperbolique est monotone croissante sur tout l'ensemble des réels et possède les deux droites horizontales $y = \pm 1$ comme asymptotes horizontales..

De tout ce qui précède on déduit l'allure suivante pour la courbe de $f(x) = \tanh x$:



3.6.5 Dérivations des fonctions hyperboliques réciproques

Argument sinus hyperbolique

Comme $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une bijection, elle admet naturellement une bijection réciproque.

Définition 31 *On appelle **fonction argument sinus hyperbolique** la fonction $Argsinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par*

$$y = Argsinh(x) \Leftrightarrow \sinh(y) = x$$

Il est important de ne pas perdre de vue les relations évidentes $Argsin(\sinh x) = x$ et $\sinh\left(Argsinh(x)\right)$ qui peuvent se révéler importantes lors de certaines simplifications des calculs.

Proposition 18 *La fonction argument sinus hyperbolique est dérivable et on a, $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$Argsinh^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

En effet, notons $y = Argsinh(x)$. Rappelons que si une fonction $y = f(x)$ admet comme réciproque (voir relation 3.1, page 62) une fonction $g = f^{-1}$ alors

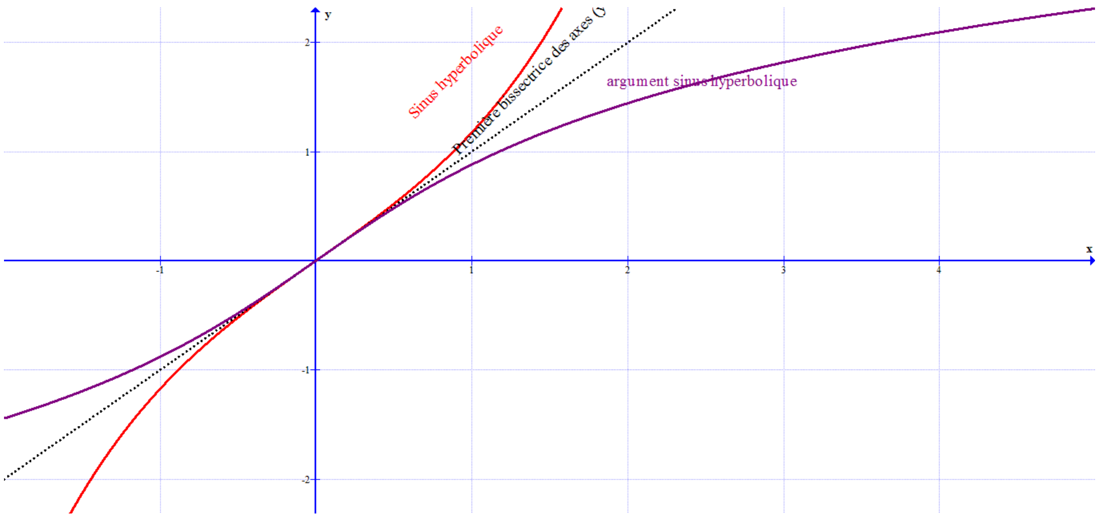
$$g_x^{-1} = \frac{1}{f_x'}$$

Il en résulte que

$$(Argsinhx)^{'} = \frac{1}{\left(\sinh^{'}(y)\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cosh(y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} \\
&= \frac{1}{1+\sinh^2(Argsinhx)} \\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, les courbes représentatives des fonctions réciproques étant symétriques par rapport à la première bissectrice des axes, on déduit la courbe représentative de $Argsinh$ de celle de sinh par symétrie axiale relative à la droite $y = x$:



Argument cosinus hyperbolique

Comme nous l'avons souligné à la section 3.6.3, la fonction cosinus hyperbolique est définie sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$ et prends ses valeurs dans $[1, +\infty[$. Elle ne constitue cependant pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[1, +\infty[$ étant donné que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(-x) = f(x)$. S'agissant d'une fonction monotone croissante sur $[o, +\infty[$, remarquons que la fonction cosinus hyperbolique constitue une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$. Elle admet donc une réciproque de $[1, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$.

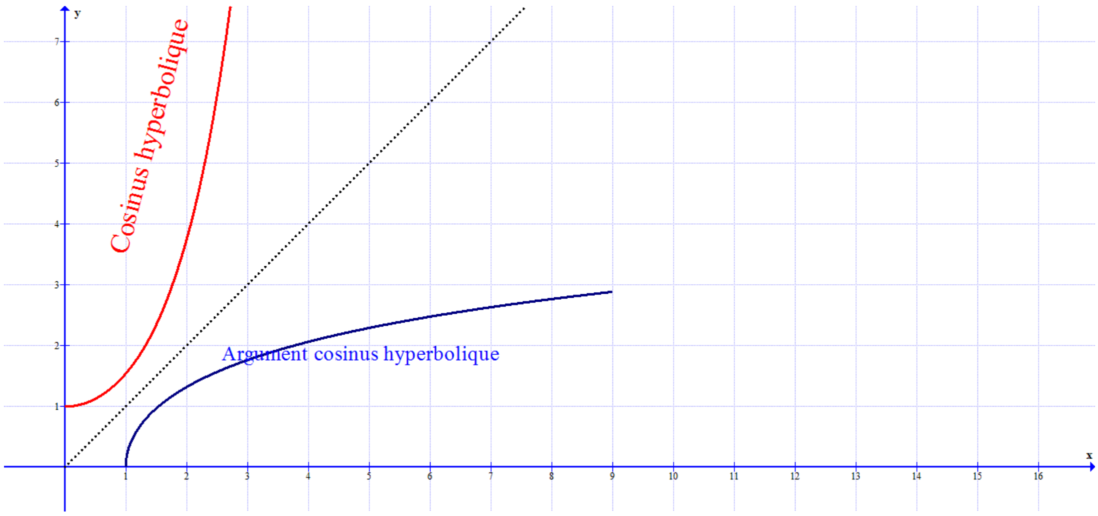
Définition 32 *On appelle* **argument cosinus hyperbolique**, *la fonction* $Argcosh : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ *définie* $\forall x \in [1, +\infty[$ *par*

$$Argcoshx = y \Leftrightarrow \cosh(y) = x$$

Il convient de ne pas perdre de vue le fait que l'expression $Argcosh\,(\cosh(x))$ est définie $\forall x \in \mathbb{R}$ mais ne vaut exactement x que lorsque $x \geq 0$. Plus exactement,

1. $\forall x \geq 1, \quad \cosh\,(Argcosh(x)) = x$
2. $\forall x \geq 0, \quad Argcosh\,(\cosh(x)) = x$

Comme les fonctions $f(x) = \cosh x$ et $g(x) = Argcoshx$ sont réciproques l'une de l'autre, il en résulte que leurs courbes représentatives respectives sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes :



La fonction argument cosinus hyperbolique est donc monotone croissante sur $[1, +\infty[$ et varie de 0 à $+\infty$.

Proposition 19 *La fonction argument cosinus hyperbolique est dérivable sur* $[1, +\infty[$ *et on a :*

$$Argcosh^{'}(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

En effet, soit $y = Argcoshx$.

$$\begin{aligned} Argcosh^{'}(x) &= \frac{1}{\cosh^{'} y} \\ &= \frac{1}{\sinh y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Argument tangente hyperbolique

Comme la tangente hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ alors la fonction **Argument tangente hyperbolique** est une bijection de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$

Ainsi, $\forall x \in]-1,1[$ on a $\tanh(Argtanh(x)) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a, $Argtanh(\tanh(x)) = x$

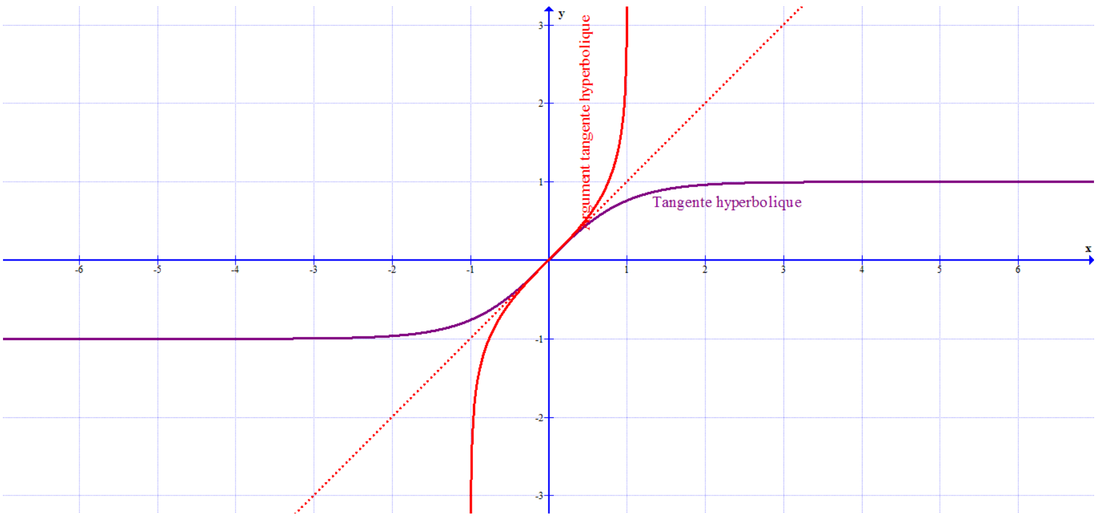
Proposition 20 *La fonction Argument tangente hyperbolique est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\forall x \in]-1,1[$ *on a*

$$(Argtanh(x))' = \frac{1}{1-x^2}$$

En effet, si $y = Argtanh(x)$ on a :

$$\begin{aligned}
[Argtanh(x)]' &= \frac{1}{(\tanh(y)')} \\
&= \frac{1}{1-\tanh^2(y)} \\
&= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

En combinant les propriétés ci-dessus au fait que la fonction tangente hyperbolique est la réciproque de la fonction Argument tangente hyperbolique, on obtient la représentation graphique de cette dernière à partir de celle de la tangente hyperbolique à partir de la symétrie dont l'axe est la première bissectrice des axes.



Chapitre 4

Complément sur les suites : convergence des suites récurrentes

4.1 Notions

Les suites récurrentes constituent une importante catégorie dans l'étude de la variation et des conditions de convergence des suites numériques .
Dans ce complément , nous nous appuyons sur les outils relatifs à la variation d'une fonction pour dégager et illustrer quelques critères de convergence de cette catégorie des suites.

Définition 33 (Suites récurrentes) *:*
Une suite (u_n) est dite récurrente lorsqu'elle est définie par la donnée de son terme initiale u_0 ainsi que celle d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ permettant de calculer les autres termes de proche en proche.

Remarque 17 *:*
La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ est souvent appelée relation de récurrence .
Comme on devrait s'y attendre, les propriétés d'une suite récurrente (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$ dépendent essentiellement de la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définissant la relation de récurrence .

La remarque 17 se comprends facilement en remarquant que chacun des termes de la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$ s'exprime en fonction du terme initial u_0 et de la fonction f :

$$u_0, \quad u_1 = f(u_0), \quad u_2 = f(u_1) = f[f(u_0)] = (f \circ f)(u_0), \quad , \cdots, u_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \quad termes}(u_0), \cdots$$

Remarque 18 *:*
Il convient de noter que la donnée du terme initial $u_0 \in I \subset \mathbb{R}$ et d'une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, ne garantissent pas nécessairement l'existence de la suite (u_n).

Il arrive, en effet, que les termes de la suite (u_n) s'écartent du domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à partir d'un certain rang.

Considérons , à titre d'exemple, la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \ln(u_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = \ln(2) \approx 0.69, \quad u_2 = \ln[\ln(2)] \approx -0.37$$

Comme $u_0 = 2, u_1 = \ln(2) \approx 0.69, u_2 \approx -0.37$ alors u_n n'existe pas dès que $n \geq 3$ car la fonction $y = \ln x$ n'est définie que pour des valeurs réelles strictement positives.

L'existence d'une suite récurrente dépend donc de la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et de la valeur initiale $u_0 \in I$.

Définition 34 *On dit d'un intervalle $J \subset I$ qu'il est stable par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $f(J) \subset J$.*
En d'autres termes,

$$\forall x \in J, \quad f(x) \in J$$

4.2 Principales propriétés d'une suite récurrente

4.2.1 Caractérisation de la limite d'une suite récurrente convergente

Étant donnée une suite récurrente (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, l'ensemble des valeurs que peut prendre sa limite, lorsque la suite est convergente, est défini par l'important résultat ci-dessous :

Proposition 21 *:*
Si la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définissant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ d'une suite récurrente (u_n), est continue et si la suite (u_n) converge vers le nombre réel l, alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

En effet,

— Comme (u_n) converge vers l alors :

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} u_n = l \\ \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = l \end{cases} \quad \text{L'unicité de la limite } l \text{ implique que sa valeur ne dépend pas de la manière dont le r} \tag{4.1}$$

— Comme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors par définition :

$$\lim_{t\to c} f(t) = f(c) \tag{4.2}$$

En plaçant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans le système 4.1, ce dernier s'écrit :

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} u_n = l \\ \lim_{n\to\infty} f(u_n) = l \end{cases} \tag{4.3}$$

Comme $n \to \infty \Rightarrow u_n \to l$ alors la deuxième équation du système 4.3 devient :

$$\lim_{u_n \to l} f(u_n) = l \tag{4.4}$$

En tenant compte de la continuité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (relation 4.2), la relation 4.4 devient :

$$\lim_{u_n \to l} f(u_n) = l \Rightarrow f(l) = l \quad \blacksquare$$

Remarque 19 *:*

1. *la relation $f(l) = l$ est exprimée en disant que le réel l est un point fixe de la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Ainsi, la limite d'une suite récurrente convergente est nécessairement un point fixe de la relation de récurrence.*

2. *Le fait que la convergence d'une suite récurrente (u_n) vers le réel l entraine que ce dernier soit un point fixe de la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ exprimant la relation de récurrence est une condition nécessaire non suffisante : un nombre réel peut être un point fixe de $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ sans que la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ ne converge vers ce nombre réel.*

3. *Comme pour toute condition nécessaire , la contraposition ($p \Rightarrow q \Leftrightarrow \rceil p \Rightarrow \rceil q$) de la proposition 21 permet de trouver une condition suffisante pour décider qu'un réel donné n'est pas la limite d'une suite récurrente (u_n) :*
$$f(l) \neq l \Rightarrow \lim_{n \to \infty} u_n \neq l$$
En d'autres termes, si un nombre réel n'est pas un point fixe de la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ alors ce nombre réel n'est pas la limite d'une suite récurrente (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

4.2.2 Variation d'une suite récurrente

D'ordinaire, pour décider du sens de variation d'une suite, on étudie les signes de l'expression

$$u_{n+1} - u_n$$

En général, cette tâche est facile lorsque l'on a affaire à une suite définie par une relation de la forme :

$$u_n = f(n)$$

Pour les suites récurrentes il peut être difficile de déterminer leur variation à partir de l'expression :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

Intuitivement , on s'attend avec raison que les propriétés de la fonction f influent sur celles de la suite (u_n).

Pour ce qui est de la variation de la suite (u_n), il faut traiter séparément le cas où la fonction f est croissante de celui où elle est décroissante .

Cas où la fonction f est croissante

En plus de la continuité de $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ qui entraîne qu'en cas de convergence de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, sa limite est nécessairement un point fixe de f, explicitons l'impact de la variation de f sur la variation de la suite récurrente (u_n) :

Proposition 22 *:*
Si pour une suite récurrente (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est croissante, alors la suite récurrente est :

— *croissante si $u_1 \geq u_0$;*

— *décroissante si $u_1 \leq u_0$*

En effet,
Supposons que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit monotone croissante.
Dans ce cas, par définition de la croissance (Voir les définitions 20 et 21, page 37) :

$$x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

1. Sous cette hypothèse de la croissance de f, montrons par récurrence que (u_n) est croissante dès que $u_1 \geq u_0$:

   (a) **Conditions initiales :**

   Comme f est croissante et $u_1 \geq u_0$ alors :

   $$f(u_1) \geq f(u_0) \Rightarrow u_2 \geq u_1 \Rightarrow f(u_2) \geq f(u_1) \Rightarrow u_3 \geq u_2, \cdots$$

   (b) **Hypothèse de récurrence :**

   Admettons que cette tendance à la croissance de (u_n) soit vraie jusqu'au terme de rang n, c'est-à-dire que :

   $$u_n \geq u_{n-1}$$

   (c) **Hérédité :**

   Montrons alors que cette tendance à la croissance de (u_n) reste vraie jusqu'au terme de rang $n+1$:

   $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) \geq 0$ car f est croissante et $u_n \geq u_{n-1}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

   Comme $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$

Comme la tendance à la croissance de (u_n) se vérifie pour quelques termes initiaux et qu'elle reste vraie pour le terme de rang $n+1$ dès qu'on la suppose vraie pour le terme de rang n, on en déduit que :

$$u_{n+1} \geq u_n, \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

La suite (u_n) est donc croissante. ■

2. Sous la même hypothèse de la croissance de f, montrons par récurrence que (u_n) est décroissante dès que $u_1 \leq u_0$:

   (a) **Conditions initiales :**

   Comme f est croissante et $u_1 \leq u_0$ alors :

   $$f(u_1) \leq f(u_0) \Rightarrow u_2 \leq u_1 \Rightarrow f(u_2) \leq f(u_1) \Rightarrow u_3 \leq u_2, \cdots$$

   (b) **Hypothèse de récurrence :**

   Admettons que cette tendance à la décroissance de (u_n) soit vraie jusqu'au terme de rang n, c'est-à-dire que :

   $$u_n \leq u_{n-1}$$

   (c) **Hérédité :**

   Montrons alors que cette tendance à la décroissance de (u_n) reste vraie jusqu'au terme de rang $n+1$:

   $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) \leq 0$ car f est croissante et $u_n \leq u_{n-1}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

   Comme $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$

Comme la tendance à la décroissance de (u_n) se vérifie pour quelques termes initiaux et qu'elle reste vraie pour le terme de rang $n+1$ dès qu'on la suppose vraie pour le terme de rang n, on en déduit que :

$$u_{n+1} \leq u_n, \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

La suite (u_n) est donc décroissante. ■

Exemple 11 *:*
Tâchons de déterminer la variation de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n\left(2 - \frac{u_n}{4}\right)$.

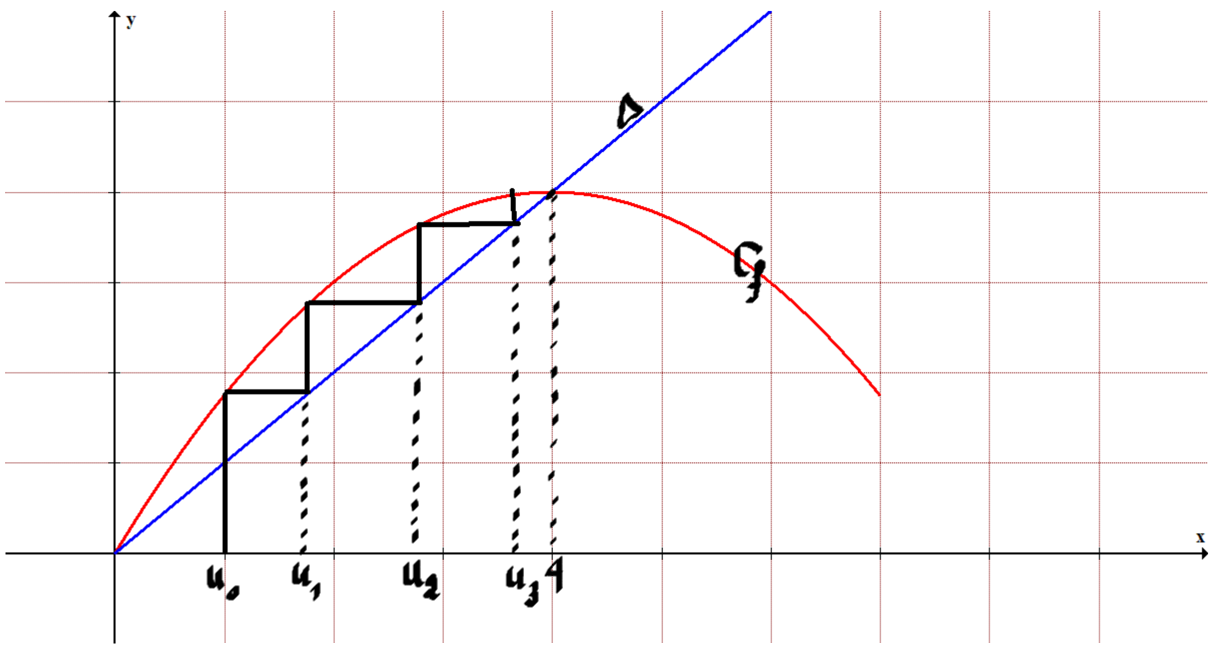
Remarquant que la relation de récurrence est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x\left(2 - \frac{x}{4}\right)$, remarquons que :

$$f^{'}(x) = \left(2x - \frac{x}{4}\right)^{'} = 2 - \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x = 4$$

Dans ce cas, les signes de $f^{'}(x)$ et la variation de f sont tels que :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

En traçant, pour un même repère orthonormé, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de cette fonction, la première bissectrice Δ des axes et en plaçant $u_0 = 1$, on peut construire progressivement $u_1, u_2 \cdots$ mais on remarque vite qu'aucun des termes ne peut dépasser 4, pour l'ensemble des raisons suivantes :



1. La restriction à l'intervalle $I = [0,4]$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\left(2 - \frac{x}{4}\right)$ est monotone croissante ;

2. $u_0 = 1 \in I = [0,4]$;

3. $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(4) = 4 \end{cases} \Rightarrow f([0,4]) = [0,4]$

Ainsi, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $I = [0,4]$.
Cette suite récurrente est donc bornée.

1. En vérifiant les hypothèses de la proposition 22, on remarque que la fonction f est monotone croissante sur l'intervalle $I = [0,4]$ et :

$$u_1 = f(u_0) = f(1) = 1\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.
Comme elle est en plus majorée, elle est forcément convergente vers un nombre réel l à déterminer.

2. En vertu de la proposition 21, la limite l de cette suite récurrente appartient à l'ensemble P_f des points fixes de la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0,4]$ par $f(x) = x\left(2 - \frac{x}{4}\right)$

En résolvant l'**équation aux points fixes** de f on obtient

$$l = l(l - \frac{l}{4}) \Rightarrow l = 4$$

Comme l'ensemble $P_f = \{4\}$ des points fixes de f ne contient que 4 et nous savons d'avance que la suite (u_n) converge, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 4$$

Cas d'une fonction f décroissante

Remarque 20 *:*
Lorsque la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est décroissante , la suite (u_n) n'est jamais monotone.

En effet, sous l'hypothèse de la décroissance de f, deux cas sont envisageables :

1. $u_0 \leq u_1$;

2. $u_0 \geq u_1$

Montrons que dans chacun de ces deux cas la décroissance de f exclut la monotonie de (u_n) :

1. Si $u_0 \leq u_1$:

$$\begin{aligned} u_0 \leq u_1 \quad & \Rightarrow \quad f(u_0) \geq f(u_1) \quad \text{par décroissance de } f \\ & \Rightarrow \quad u_1 \geq u_2 \\ & \Rightarrow \quad f(u_1) \leq f(u_2) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_2 \leq u_3 \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\begin{cases} u_0 \leq u_1 \\ u_1 \geq u_2 \\ u_2 \leq u_3 \end{cases}$ et ces quatre premiers termes de la suite montrent qu'elle n'est pas monotone.

2. Si $u_0 \geq u_1$:

$$\begin{aligned} u_0 \geq u_1 \quad & \Rightarrow \quad f(u_0) \leq f(u_1) \quad \text{par décroissance de } f \\ & \Rightarrow \quad u_1 \leq u_2 \\ & \Rightarrow \quad f(u_1) \geq f(u_2) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_2 \geq u_3 \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\begin{cases} u_0 \geq u_1 \\ u_1 \leq u_2 \\ u_2 \geq u_3 \end{cases}$ et ces quatre premiers termes de la suite montrent qu'elle n'est pas monotone.

Comme la monotonie de la suite (u_n) n'est garantie que par la croissance de la fonction f par laquelle s'exprime la relation de récurrence , la stratégie consistera ici à extraire de la suite (u_n) des sous-suites pour lesquelles la fonction décroissante f peut être valablement remplacée par une fonction croissante afin d'appliquer la proposition 22 à chacune des sous-suites extraites de (u_n) et d'en déduire une condition suffisante de convergence de (u_n).

Remarque 21 *:*
Notons que la décroissance de f entraîne la croissance de $h = f \circ f$.

En effet, admettons que f soit décroissante sur I. Dans ce cas :

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\begin{aligned} x_1 \geq x_2 \quad & \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{par décroissance de } f \\ & \Rightarrow \quad f[f(x_1)] \geq f[f(x_2)] \quad \text{par décroissance de } f \\ & \Rightarrow \quad (f \circ f)(x_1) \geq (f \circ f)(x_2) \end{aligned}$$

Comme $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \geq x_2 \Rightarrow (f \circ f)(x_1) \geq (f \circ f)(x_2)$ alors $h = f \circ f$ est croissante sur I.

— En appliquant successivement la fonction croissante $h = f \circ f$ à partir du terme initial u_0, on génère la sous-suite $(u_n)_p$, notée aussi par (u_{2n}) des termes de rang pair de la suite (u_n) :

$$(u_n)_p \equiv (u_{2n}) : \quad u_0, \quad u_2 = h(u_0), \quad u_4 = h(u_2), \cdots, u_{2n+2} = f(u_{2n}), \cdots$$

— En appliquant successivement la fonction croissante $h = f \circ f$ à partir du terme u_1, on génère la sous-suite $(u_n)_i$, notée aussi par (u_{2n+1}) des termes de rang impair de la suite (u_n) :

$$(u_n)_i \equiv (u_{2n+1}) : \quad u_1, \quad u_3 = h(u_1), \quad u_5 = h(u_3), \cdots, u_{2n+3} = f(u_{2n+1}), \cdots$$

Comme pour les deux sous-suites $(u_n)_p$ et $(u_n)_i$ extraites de (u_n), les deux relations de récurrences $u_{2n+2} = h(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$ sont exprimées par une fonction croissante $h = f \circ f$, la proposition 22 (page 89) se traduit en ces termes :

1. si $u_0 \leq u_2$, la sous-suite $(u_n)_p$ des termes de rang pair est croissante.
   — Remarquons dans ce cas que $f(u_0) \geq f(u_1) \Rightarrow u_1 \geq u_3$. Ce qui implique que la sous-suite $(u_n)_i$ des termes de rang impairs est décroissante dans ce cas.
2. si $u_0 \geq u_2$, la sous-suite $(u_n)_p$ des termes de rang pair est est décroissante.
   — Remarquons dans ce cas que $f(u_0) \leq f(u_1) \Rightarrow u_1 \leq u_3$. Ce qui implique que la sous-suite $(u_n)_i$ des termes de rang impairs est croissante dans ce cas.

En résumé, de ce qui précède découle la proposition suivante :

Proposition 23 *:*
lorsque la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ d'une suite récurrente (u_n) est exprimée par une fonction décroissante $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, la suite (u_n) n'est pas monotone mais on peut toujours en extraire deux sous suites monotones :

1. *la suite $(u_n)_p$ des termes de rang pair,*
2. *la suite $(u_n)_i$ des termes de rang impair.*

Ces deux sous-suites $(u_n)_p$ et $(u_n)_i$ sont des monotonies contraires dans le sens où l'une est croissante lorsque l'autre est décroissante.
Plus précisément :

1. *si $u_0 \leq u_2$ alors la sous-suite $(u_n)_p$ des termes de rang pair est croissante tandis que la sous-suite $(u_n)_i$ des termes de rang impair est décroissante.*
2. *si $u_0 \geq u_2$ alors la sous-suite $(u_n)_p$ des termes de rang pair est décroissante tandis que la sous-suite $(u_n)_i$ des termes de rang impair est croissante.*

4.2.3 Conditions de convergence d'une suite récurrente

L'étude de la convergence d'une suite est aisée lorsqu'il s'agit d'une suite monotone .
En effet, comme établi par la proposition 15 (sous-section 1.4.2, page 27), pour avoir la garantie de la convergence d'une suite monotone, il suffit de s'assurer que :
— la suite est majorée si elle croissante ;

— la suite est minorée lorsqu'elle est décroissante .

S'agissant des conditions de convergence d'une suite récurrente (u_n), l'exemple 11 (page 90) est inspirant.
En y étudiant la variation de la fonction f on a constaté que $f([0,4]) \subset [0,4]$ et cela nous a permis d'établir le caractère borné de la suite qui était en plus déjà monotone croissante. D'où sa convergence.

Ces considérations particulières a l'exemple 11 sont généralisées par la proposition suivante :

Proposition 24 :
Si $f : [a,b] \mapsto [a,b]$ est une fonction continue croissante et si $f([a,b]) \subset [a,b]$ alors la suite (u_n) converge vers $l \in [a,b]$ où le nombre réel l est tel que $f(l) = l$.

En effet, comme $f([a,b]) \subset [a,b]$ alors $\forall \quad n \in \mathbb{N}, a \leq u_n \leq b$.

La suite (u_n) est donc bornée .

— Si $u_1 \geq u_0$ alors la suite est croissante (d'après la proposition 22) et majorée car bornée . Dans ce cas elle converge vers $l \in [a,b]$ avec $f(l) = l$ (d'après la proposition 21).

— Si $u_1 \leq u_0$, alors la suite est décroissante et minorée car bornée . Elle converge donc vers $l \in [a,b]$ avec $f(l) = l$.

Quelles sont les conditions de convergences d'une suite récurrente lorsque la relation de récurrence u_{n+1} est exprimée par une fonction décroissante f ?

Comme l'indique la proposition 23, la suite (u_n) n'est pas monotone dans ce cas.
En restant dans l'esprit de la proposition 23, il suffit de considérer les deux sous-suites monotones $(u_n)_p$ et $(u_n)_i$ et d'en étudier la convergence.
La suite (u_n) est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si les deux sous-suites extraites $(u_n)_p$ et $(u_n)_i$ convergent également vers la même limite l.

4.2.4 Etude détaillée d'un exemple

Problème 8 :
Soit f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = \frac{1}{1+e^{-\lambda x}}$, où λ est un paramètre réel strictement positif.

1. *Etudier la variation de f_λ et donner l'allure de sa courbe,*
2. *Montrer que f_λ admet un centre de symétrie,*
3. *Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = x$ admet une solution unique réelle positive que l'on notera x_λ*
4. *Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$ où n est un entier naturel*

Correction :

1. Étudions la variation de la fonction f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = \frac{1}{1+e^{-\lambda x}}$, où λ est un paramètre réel strictement positif.

$$\begin{aligned} f'_\lambda(x) &= \frac{-\left(1+e^{-\lambda x}\right)'}{(1+e^{-\lambda x})^2} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2} > 0 \end{aligned}$$

La fonction f_λ est donc monotone croissante sur $\mathbb{R}$.

En en étudiant les limites aux bornes on a d'une part :

$$\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-\lambda x}} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to-\infty} \left(1+e^{-\lambda x}\right) = +\infty$$

d'autre part on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-\lambda x}} = 1 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1+e^{-\lambda x}\right) = 0$$

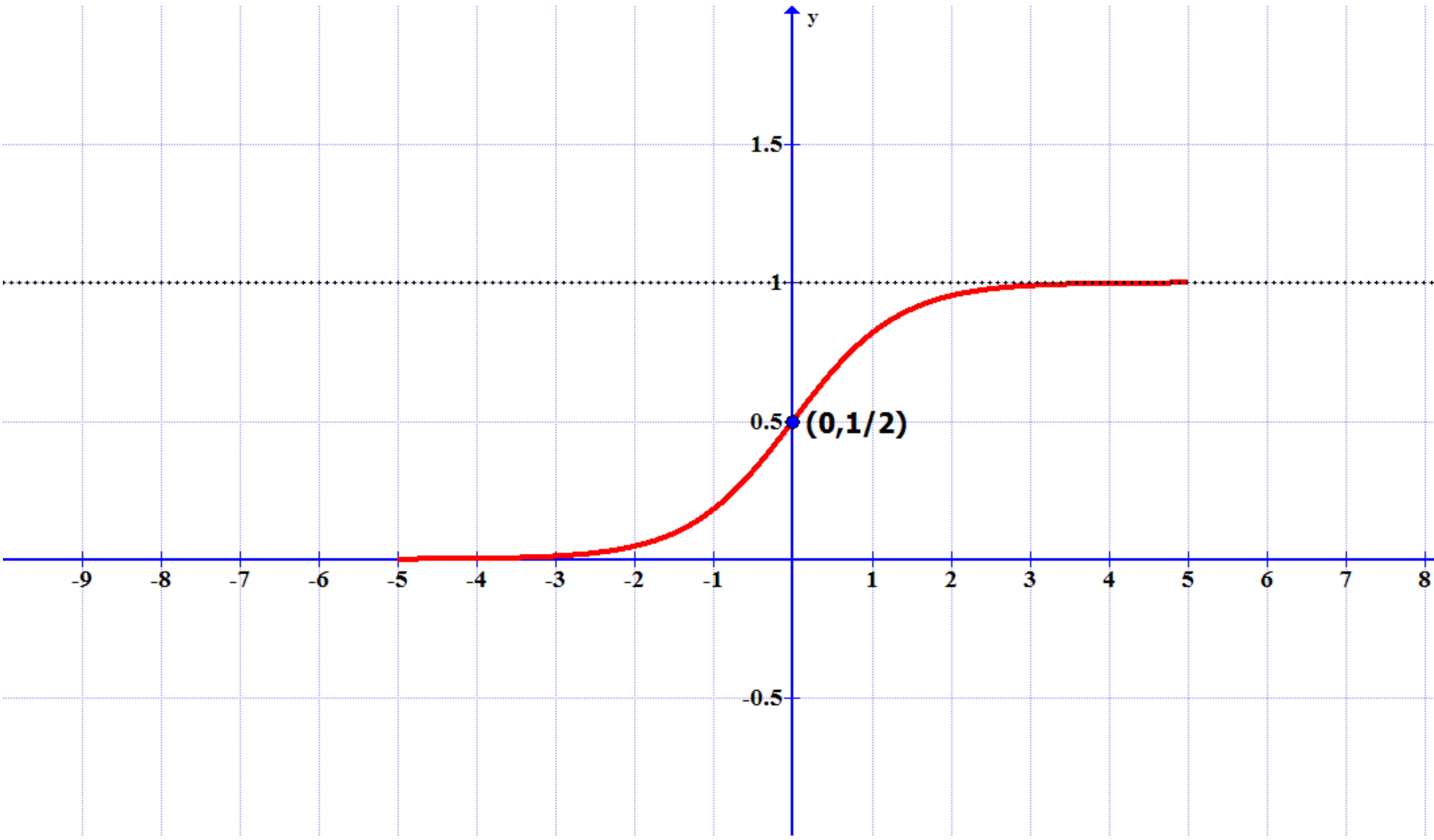
Pour toute valeur λ la fonction f_λ est donc monotone croissante sur $\mathbb{R}$ et prends toutes ses valeurs dans $]0,1[$.
On obtient donc une bijection $f_\lambda : \mathbb{R} \to]0,1[$
En réalisant le tableau de variation on a donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$+$	
$f_\lambda(x)$	0	$\nearrow$	1

On peut, juste pour raisons d'illustration, prendre $\lambda = \frac{3}{2}$ et on a :

$$f_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}x}}$$

La courbe de cette fonction particulière est :



2. Montrons que f_λ admet un centre de symétrie.

   Il est connu que si un point $\Omega\,(a,b)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative f alors dès que $a+x$ et $a-x$ appartiennent au domaine de définition de f on a la relation :

$$f\,(a-x)+f\,(a+x)=2b$$

   Le graphique ci-dessus permet de conjecturer que $\Omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe. On a en effet :

$$\begin{aligned}
f\,(0-x)+f\,(0+x) &= f(-x)+f(x)\\
&= \frac{1}{1+e^{\lambda x}}+\frac{1}{1+e^{-\lambda x}}\\
&= \frac{1+e^{-\lambda x}+1+e^{\lambda x}}{\left(1+e^{\lambda x}\right)\left(1+e^{-\lambda x}\right)}\\
&= \frac{1+e^{-\lambda x}+1+e^{\lambda x}}{1+e^{-\lambda x}+1+e^{\lambda x}}
\end{aligned}$$

$$= \quad 1 = 2 \times \frac{1}{2}$$

En dehors des considérations graphiques on peut aussi utiliser l'habituelle méthodes des coefficients indéterminés pour trouver a et b.

En effet, en écrivant :

$$f(a-x) + f(a+x) = 2b,$$

on en déduit que :

$$\frac{1}{1+e^{-\lambda(a-x)}} + \frac{1}{1+e^{-\lambda(a+x)}} = 2b \Longrightarrow \frac{1+e^{-\lambda(a+x)}+1+e^{-\lambda(a-x)}}{\left[1+e^{-\lambda(a-x)}\right]\left[1+e^{-\lambda(a+x)}\right]} = 2b$$

Il en résulte que :

$$\frac{2+e^{-\lambda(a+x)}+1+e^{-\lambda(a-x)}}{1+e^{-\lambda(a+x)}+e^{-\lambda(a-x)}+e^{-2a\lambda}} = 2b$$

On obtient :

$$2+e^{-\lambda(a+x)}+1+e^{-\lambda(a-x)} = 2b\left[1+e^{-\lambda(a+x)}+e^{-\lambda(a-x)}+e^{-2a\lambda}\right]$$

De cette dernière relation on tire :

$$2-2b = -\left[e^{-\lambda(a+x)}+e^{-\lambda(a-x)}\right] + 2b\left[e^{-\lambda(a+x)}+e^{-\lambda(a-x)}+e^{-2a\lambda}\right]$$

En considérant cette égalité des deux polynômes en b on obtient le système [1]

$$\begin{cases} e^{-\lambda(a+x)}+e^{-\lambda(a-x)} = -2 \\ \left[e^{-\lambda(a+x)}+e^{-\lambda(a-x)}\right]+e^{-2a\lambda} = -1 \end{cases}$$

En substituant l'équation (1) dans (2) on obtient :

$$-2+e^{-2a\lambda} = -1 \Longrightarrow e^{-2a\lambda} = 1 \Longrightarrow 2a\lambda = 0 \Longrightarrow a = 0$$

En plaçant la valeur $a = 0$ dans la relation $f(a-x)+f(a+x) = 2b$ on obtient le calcul fait ci-dessus qui établie que

$$f_\lambda(-x) + f_\lambda(x) = 1$$

On a donc :

$$2b = 1 \Longrightarrow b = \frac{1}{2}$$

1. Il convient de remarquer qu'en toute rigueur, chacun des équations de ce système est impossible dans la mesure où lorsque l'on considère la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, la quantité $e^x + e^y$ ne peut pas être négative car il s'agit d'une somme des termes positifs... Cependant, lorsque l'on étudie des variables complexes, cela est possible ($e^{i\pi} = -1$) et bien entendu, il est possible comme c'est le cas ici qu'un système d'équations n'ayant chacune une signification que sur $\mathbb{C}$ puisse avoir une solution sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrons que l'équation $f_\lambda(x) = x$ admet une solution unique positive notée x_λ.

$$f_\lambda(x) = x \Longrightarrow f_\lambda(x) - x = 0$$

En notant $z(x) = f_\lambda(x) - x$ il est évident que x_λ est la solution unique de l'équation $f_\lambda(x) = x$ si et seulement si $x\lambda$ est solution unique l'équation $z(x) = 0$.

(a) Étudions la variation de la fonction $z : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ par :

$$z(x) = f_\lambda(x) - x$$

$$\begin{aligned} z^{'}(x) &= [f_\lambda(x) - x]^{'} \\ &= f_\lambda^{'}(x) - 1 \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2} - 1 \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda x} - \left(1+e^{-\lambda x}\right)^2}{(1+e^{-\lambda x})^2} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{e^{\lambda x}} - \left(1+e^{-\lambda x}\right)^2}{(1+e^{-\lambda x})^2} \end{aligned}$$

Comme $\left(1+e^{-\lambda x}\right)^2 > 0$ alors les signes de $z^{'}(x)$ sont ceux de $\frac{\lambda}{e^{\lambda x}} - \left(1+e^{-\lambda x}\right)^2$

Or sur $[0, +\infty[$ on a évidemment $\frac{\lambda}{e^{\lambda x}} < 1$ et $\left(1+e^{-\lambda x}\right)^2 > 1$

On en déduit que $z^{'}(x) = \frac{\frac{\lambda}{e^{\lambda x}} - \left(1+e^{-\lambda x}\right)^2}{\left(1+e^{-\lambda x}\right)^2} < 0$ et par conséquent la fonction $z(x) = f_\lambda(x) - x$ est monotone décroissante sur $[0, +\infty[$.

D'une part $z(0) = f_\lambda(0) - 0 = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} z(x) = \lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) - \lim_{x\to+\infty} x = 1 - \infty = -\infty$

La fonction $z : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est donc monotone décroissante.

(b) Nombre de solutions de $f_\lambda(x) = x$ sur $\mathbb{R}$:

Comme la fonction $z(x) = f_\lambda(x) - x$ est monotone décroissante sur $[0, +\infty[$ et elle y change de signe ($z(0) > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} z(x) < 0$) alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $z(x) = f_\lambda(x) - x = 0$ admet une solution unique sur $x_\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Comme $z(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $z(1) = \frac{1}{1+e^{-\lambda}} - 1 < 0$ alors la solution unique x_λ de l'équation $f_\lambda(x) = x$ appartient à l'intervalle $[0, 1]$

4. Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f_\lambda(u_n) \end{cases}$$

5. Convergence de la suite (u_n)

   Comme la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bornée alors la suite (u_n) est bornée et en particulier minorée.

   Comme f_λ est croissante et $u_1 = f_\lambda(u_0) = \frac{1}{1+e^{-\lambda}} < 1 = u_0$ alors, d'après la proposition 22 ci-dessus, la suite (u_n) est décroissante.

   Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit la convergence de la suite (u_n) vers une limite unique l.

   En vertu de la proposition 21, la limite l de la suite (u_n) est nécessairement un point fixe de la fonction f_λ. Comme cette dernière admet $x_\lambda \in]0,1[$ comme unique point fixe, alors la suite (u_n) converge vers $l = x_\lambda$.

4.2.5 Cas d'une récurrence décroissante

Les considérations précédentes n ?ont concerné que les suites pour lesquelles la relation de récurrence est exprimée par une fonction croissante.

Considérons le cas où la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ d'une suite récurrente est exprimée grâce à une fonction monotone décroissante $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

Il s'agit d'un cas qui se déduit facilement de celui où f est croissante si on applique la fonction $f \circ f$ à deux sous-suites de (u_n) :

— la sous-suite (u_{2n}) des termes de rang pair :

$$u_0, \quad u_2 = f \circ f(u_0), \quad u_4 = f \circ f(u_2), \quad , \cdots$$

— la sous-suite (u_{2n+1}) des termes de rang impair :

$$u_1, \quad u_3 = f \circ f(u_1), \quad u_5 = f \circ f(u_3), \quad , \cdots$$

On obtient au final la proposition suivante :

Proposition 25 *:*
si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue monotone décroissante , alors pour la suite récurrente (u_n),

— *la sous-suite (u_{2n}) des termes de rang pair converge vers une limite l vérifiant $f \circ f(l) = l$;*

— *la sous-suite(u_{2n+1}) des termes de rang impair converge vers une limite l' vérifiant $f \circ f\left(l'\right) = l'$;*

— *la suite (u_n) converge si $l = l'$*

En effet, la décroissance de f entraine la croissance de $f \circ f$.

— En appliquant la fonction $f \circ f$ aux termes de la suite (u_n) en partant de u_0 on obtient la sous-suite des termes de rang pais :

$$u_0, \quad u_2 = f \circ f(u_0), \quad u_4 = f \circ f(u_2), \quad , \cdots$$

—

— En appliquant la fonction $f \circ f$ aux termes de la suite (u_n) en partant de u_1 on obtient la sous-suite des termes de rang impais :

$$u_1, \quad u_3 = f \circ f(u_1), \quad u_5 = f \circ f(u_3), \quad , \cdots$$

Comme pour chacune de ces deux sous-suite la relation de récurrence est exprimée par la fonction croissante $f \circ f$, on applique la proposition 22.

4.3 Exercices

Problème 9 *:*
Un producteur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.

1. *Soit u_n le nombre de clients de l'année n ($u_0 = 200$)*
   (a) *Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.*
   (b) *Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4*
2. *Considérons la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$*
   — *Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n*
   — *Quelle est la nature de (v_n) ?*
   — *Calculer la limite de la suite (v_n)*
3. *Quel sera à long terme le nombre de clients de ce fournisseur ?*

Problème 10 *:*
Sur le marché d'un certain bien, la demande le mois n, est donnée par la relation $D_n = -4p_n + 46$ où p_n est le prix du bien le mois n et $p_0 = 5$.
L'offre de ce même bien, le mois $n+1$, est donnée en fonction de p_n par $S_{n+1} = 3p_n - 10$

1. *Montrer que lorsque le marché est en équilibre, alors :*

$$p_{n+1} = -\frac{3}{4}p_n + 14$$

2. *On souhaite étudier l'évolution de la suite (p_n) lorsque le marché est en équilibre chaque mois n. On considère pour cela la suite auxiliaire (u_n) définie par :*

$$u_n = p_n - 8$$

(a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique

(b) En déduire la limite de la suite (p_n)

3. *Déterminer le plus petit entier n pour que $|p_n - 8| < 10^{-2}$. Commenter ce résultat à la lumière du problème.*

Chapitre 5

Intégrales Simples

5.1 Différentielle : premières notions

Soit f une fonction de domaine de définition Df et $x_o \in Df$.

D'après la théorie relative à l'équation de la tangente, l'approximation linéaire de la fonction f au voisinage de x_0 est :

$$f(x) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f^{'}(x_0)\Delta x$$

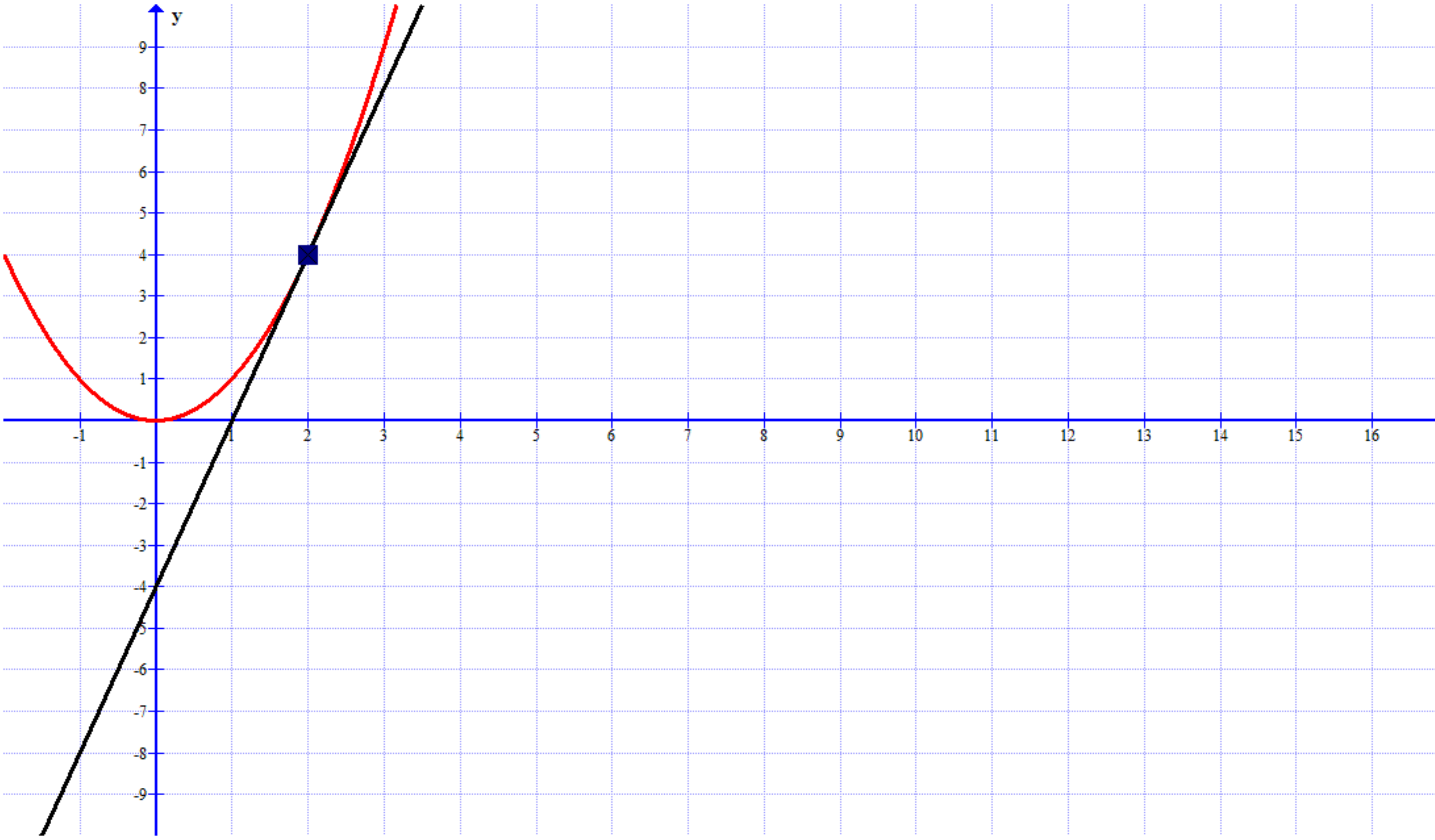
Cette droite représente la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 .

La différentielle de f est la fonction qui associe à chaque accroissement $\Delta x = x - x_0$ la quantité $dy = (f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)) - f(x_0) = t(x) - t(x_0)$ où $t = t(x)$ est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 .

Remarque 22 *En langage purement géométrique, la différentielle df est l'application linéaire qui associe à tout vecteur $\Delta x = x - x_0$ de la droite vectorielle $\mathcal{D}_{x_0}$ tangente à l'axe des abscisses au point x_0 le vecteur $dy = t(x) - t(x_0) = t(x) - f(x_0)$ de la droite vectorielle $\mathcal{D}_{f(x_0)}$ tangente à la courbe représentative de f au point d'ordonnée $f(x_0)$.*

Ainsi, en considérant la droite vectorielle $\mathcal{D}_{x_0}$ tangente à l'axe des abscisses au point x_0 ainsi que la droite vectorielle $\mathcal{D}_{f(x_0)}$ tangente à la courbe représentative de f au point d'ordonnée $f(x_0)$, la différentielle df_{x_0} est l'application linéaire $df_{x_0} : \mathcal{D}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{D}_{f(x_0)}$ qui associe à chaque vecteur $\Delta x \in \mathcal{D}_{x_0}$, le vecteur $dy \in \mathcal{D}_{f(x_0)}$ défini par :

$$\begin{aligned} df_{x_0}(\Delta x) &= dy \\ &= \Delta x . \tan \alpha \\ &= \Delta x . \frac{dy}{dx} \\ &= \Delta x . f^{'}(x_0) \end{aligned}$$



Comme $\forall x_0 \in D_f$ et $\forall \Delta x \in \mathcal{D}_{x_0}$ on a $df_{x_0}(\Delta x) = f^{'}(x_0).\Delta x$ alors on écrit pour tout accroissement Δx de la variable x,

$$df = f^{'}(x).\Delta x$$

Remarquons que la quantité $df = f^{'}(x).\Delta x$ constitue alors une approximation de l'accroissement Δf qu'a subi la fonction f lorsque la variable x subit l'accroissement Δx et que cette approximation est d'autant plus meilleure que la quantité Δx est proche de zéro.

Si $\Delta x \to 0$ on écrit tout simplement dx au lieu de Δx et dans ce cas $dy = y^{'}dx$ constitue la variation (qui tend, par conséquent vers zéro aussi) de la fonction f consécutivement à celle dx de la variable x. On qualifie souvent d'**infinitésimales** les variations dx et $dy = y^{'}dx$ pour exprimer le fait qu'elles sont négligeables (tendent vers zéro).

Ces considérations sont justement utilisées pour calculer l'accroissement négligeable provoqué sur une fonction par un accroissement jugé aussi négligeable de sa variable au voisinage d'un point précis.

Illustration 19 *Considérons une grosse sphère métallique de rayon $r = 10m$ .Suite à une augmentation de la température du milieu ambiant, son rayon passe de 10m à 10,001m.*

Utiliser la notion de différentielle pour trouver, approximativement, l'accroissement du volume de la sphère qui en résultera.

INDICATION DE SOLUTION :

Il est connu que le volume V d'une sphère est une fonction de son rayon r exprimée par la relation $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Dans cette illustration l'accroissement du rayon est $dr = 0.001$ au point $r_0 = 10$. La question consiste alors à exprimer $dV =$
On obtient alors :

$$dV = V_r^{'} dr = (4\pi r^2)_{10} 0.001 = 4 \times 3.14 \times 10^2 \times 0.001 \approx 1.256 m^3$$

Remarque 23 *La différentielle en tant que notion théorique est très subtile mais pour la suite de cet exposé, la simple relation $dy = y^{'} dx$ nous suffira...*

5.2 Notion d'intégrale : définition et première illustration

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I = [a, b]$.

Qu'appelle-t-on intégrale de f sur l'intervalle $I = [a, b]$?

Commençons par subdiviser l'intervalle I en n sous-intervalles en prenant une suite $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ et dans chaque sous-intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ appelons respectivement M_k et m_k le maximum et le minimum local.

Définition 35 *On appelle* ***somme de Riemann supérieure***[1] *la quantité :*

$$S_n = (x_1 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 + \cdots (x_n - x_{n-1})M_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i M_i$$

Définition 36 *On appelle* ***somme de Riemann inférieure***[2] *la quantité :*

$$s_n = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \cdots (x_n - x_{n-1})m_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i m_i$$

Quelle signification géométrique pouvons-nous donner aux quantités S_n et s_n ?

En notant S la surface limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses ainsi que les droites verticales $x = a$ et $x = b$ on démontre aisément que :

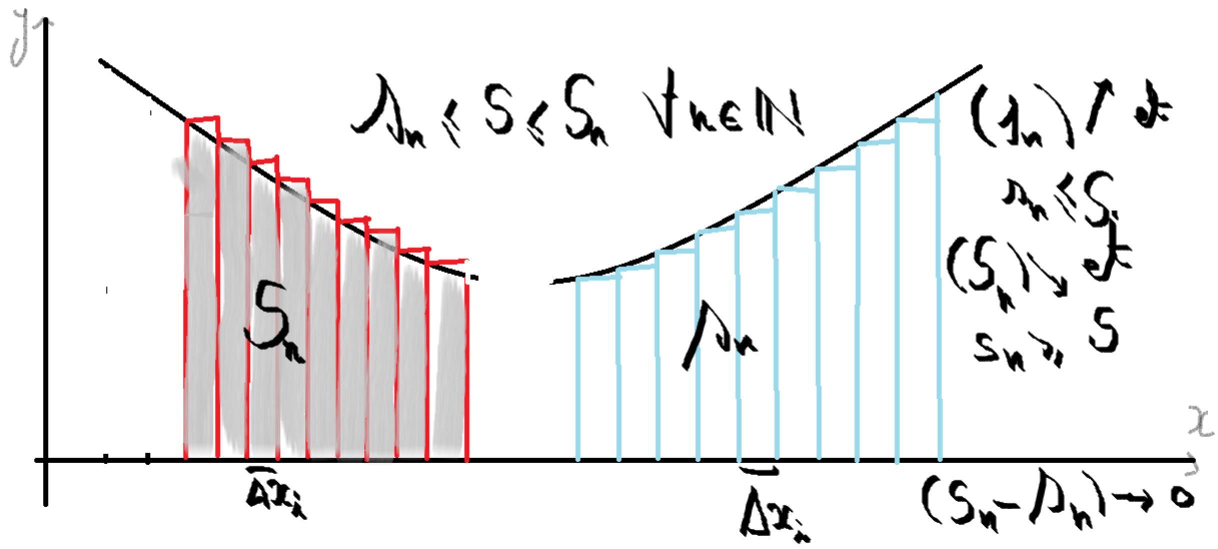
1. La suite (S_n) est telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} \leq S_n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \leq S$

1. Ou encore Somme de Darboux supérieure
2. Ou encore Somme de Darboux supérieure

3. On résume ces deux propriétés en disant que la suite (S_n) des sommes supérieures de Riemann est décroissante et majorée par S

Dans le même ordre d'idées, on démontre que :

1. La suite (s_n) est telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_{n+1} \geq S_n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \geq S$
3. On résume ces deux propriétés en disant que la suite (S_n) des sommes inférieures de Riemann est croissante et minorée par S



Ainsi, pour toute fonction f et tout intervalle $I = [a, b]$,

1. la suite (s_n) est convergente car elle est à la fois croissante et majorée (par S),
2. la suite (S_n) est convergente car elle est à la fois décroissante et minorée (par S),

Définition 37 *On dit d'une fonction f qu'elle est intégrable sur un intervalle I si les suites (S_n) et (s_n) des sommes supérieures et inférieures de Riemann convergent vers une limite commune S appelée* ***intégrale de la fonction f sur l'intervalle*** $I = [a, b]$.

On démontre que si f est une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$, alors elle y est intégrable.

En remarquant que lorsque $n \to \infty$, la quantité Δx tend vers dx et dans ce cas, chacun des intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ se réduit (à la limite) en un point de sorte qu'il n'est plus possible de distinguer M_k de m_k que l'on note tout simplement par $f(x)$.

En nous convenant de remplacer alors le signe $\sum$ de sommation discrète par celui $\int$ de sommation continue on écrit :

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to\infty} s_n \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \times \Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Ce formalisme justifie le symbole $\int_a^b f(x)dx$ qui provient de $\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x$ ou $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x$ en remarquant que lorsque n tend vers $+\infty$, chacun des sous-intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ se réduisant en un point,

1. M_i ou m_i est remplacé par $f(x)$,
2. Δx est remplacé par dx
3. $\sum$ est remplacé par $\int$

Ainsi la quantité $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire de la surface S comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses ainsi que les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

Remarque 24 *Il généralement difficile d'utiliser cette définition pour calculer une intégrale. On contourne cet obstacle grâce à la* **formule de Newton-Leibniz** *d'après laquelle :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dans cette expression, F est une **primitive** *de f c'est-à-dire une fonction dont la dérivée est f.*

Avant de parcourir en les illustrant les différentes techniques d'intégration qui permettent de contourner l'utilisation de cette définition, illustrons cette dernière par un exemple simple.

Illustration 20 *Soit à calculer, en utilisant la définition,*

$$I = \int_0^a x dx$$

La fonction à intégrer est $f(x) = x$ sur l'intervalle $I = [0, a]$

En subdivisant ce dernier en n sous intervalle de même longueur (par conséquent $\Delta x = \frac{a}{n}$), on obtient successivement $x_0 = 0, x_1 = \frac{a}{n}, x_2 = \frac{2a}{n} \cdots, x_k = \frac{ka}{n}, \cdots, x_n = \frac{na}{n} = a$ et dans ce cas la somme de Riemann inférieure vaut :

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x_i = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{a}{n}\left(f(\frac{a}{n}) + f(\frac{2a}{n}) + \cdots + f(\frac{(n-1)a}{n})\right)$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n} + \frac{2a}{n} + \cdots + \frac{(n-1)a}{n} +\right) = \frac{a}{n} \times \frac{a}{n}\left(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\right)$$

En tenant compte du fait que $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$,on obtient :

$$s_n = \frac{a}{n} \times \frac{a}{n}\left(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\right) = \frac{a^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{a^2}{n^2} \times \frac{n^2 - n}{2} = \frac{a^2n^2 - na^2}{2n^2}$$

En définitive,

$$\int_0^a xdx = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^2n^2 - na^2}{2n^2} = \frac{a^2}{2}$$

Cet exemple simple illustre assez bien combien il peut être fastidieux de se servir de la définition d'une intégrale comme limite d'une des sommes de Riemann et permet d'apprécier à sa juste valeur l'importante formule de Newton-Leibniz. Dans l'esprit de cette dernière (remarque 24), remarquons que la fonction $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ est une primitive de la fonction $f(x) = x$ étant donné que $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x$.

Il en résulte que

$$\int_0^a xdx = F(a) - F(0) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}.0^2 = \frac{a^2}{2}$$

Exercice 13 *En utilisant la définition, calculer*

$$\int_0^b x^2dx$$

5.2.1 Intégrale et primitive

Nous savons que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction positive f sur l'intervalle $I = [a, b]$, en tant que limite communes des sommes de Riemann, représente l'aire de la surface limitée par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, l'axe Ox ainsi que les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

Définition 38 (Primitive d'une fonction) *:*
on dit que la fonction F est une primitive de la fonction f si $F^{'}(x) = f(x)$.

Remarquons que si F_1 et F_2 sont deux primitives de la même fonction f alors leur différence $F_1 - F_2$ est forcément une constante C.

En effet,

$$\begin{aligned}\left[(F_1 - F_2)(x)\right]' &= F_1'(x) - F_2'(x)\\ &= f(x) - f(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Comme $\left[(F_1 - F_2)(x)\right]' = 0$ alors $\left[(F_1 - F_2)(x)\right] = C \in \mathbb{R}$ et dans ce cas il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $F_1(x) = F_2(x) + C$

Remarque 25 *:*
on déduit de ce qui précède que si F est une primitive de la fonction f alors toute autre primitive de f est de la forme $F(x) + C$.

Problème 11 *:*
quel lien existe-t-il entre une primitive de f sur l'intervalle $I = [a, b]$ et l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$?

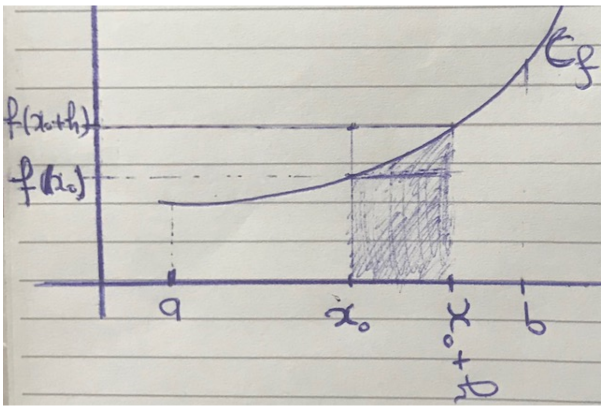
Considérons, pour commencer, une fonction positive et croissante f sur un intervalle $I = [a, b]$ et notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Considérons alors la fonction $\mathcal{A} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall \quad x \in I = [a, b]$ par $\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)dt$ et fixons x_0 dans $[a, b]$.

Vérifions la dérivabilité sur I de la fonction $\mathcal{A} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie.

1. Il est évident que $\mathcal{A}(a) = 0$.
   En effet, $\mathcal{A}(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.

2. Notons h un réel strictement positif tel que $x_0 + h \in I$



Remarquons que $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt$ représente l'aire de la surface limitée par l'axe Ox, la courbe C_f ainsi que les droites verticales $x = x_0$ et $x = x_0 + h$.

Comme f est croissante sur $[x_0, x_0 + h]$ il va de soi que :

$$h \times f(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leq h \times f(x_0 + h) \tag{5.1}$$

La quantité h étant positive, on déduit de la relation 5.1 que :

$$f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h) \tag{5.2}$$

Comme $\lim_{h \to 0^+} f(x_0) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h) = f(x_0)$ alors :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0) \tag{5.3}$$

3. Remarquons qu'en considérant h un réel strictement négatif tel que $x0 + h$ appartienne à l'intervalle $I = [a, b]$:

   (a) $x_0 + h$ se trouve à gauche de x_0 et $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$;

   (b) $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$ est une quantité négative.

   Dans ce cas on obtient :

$$h \times f(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

   En divisant cette dernière inégalité par h (qui est négatif) on obtient :

$$f(x_0 + h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

   On déduit de cette dernière relation que :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0) \tag{5.4}$$

   Les relation 5.3 et 5.4 entraine que

$$\mathcal{A}'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$$

La fonction $\mathcal{A} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, est donc dérivable en x_0 et a $f(x_0)$ comme nombre dérivé en x_0.

En définitive, la fonction $\mathcal{A} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout élément $x \in I = [a, b]$ par $\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a.

Remarque 26 (Formule de Newton-Leibniz) *:*
si une fonction f est intégrable sur l'intervalle $I = [a, b]$ et si F est une primitive quelconque de f alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En effet, comme la fonction $\mathcal{A} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall \quad x \in I = [a,b]$ par $\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f alors si $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une autre primitive de f on a nécessairement (en vertu de la remarque 25 , page 109) $F(x) = \mathcal{A}(x) + C$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [\mathcal{A}(b) + C] - [\mathcal{A}(a) + C] \\ &= \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) \\ &= \mathcal{A}(b) - 0 \\ &= \int_a^b f(t)dt \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Illustration 21 *:*
La résolution de l'illustration 20 ainsi que celle de l'exercice 13 montrent à quel point la formule de Newton-Leibniz facilite le calcul d'intégrales.

Ainsi, par exemple, si l'on doit calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ *, il suffit de remarquer que* $(\sin x)' = \cos x$ *pour avoir :*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

Avant d'entrer dans le vif des méthodes d'intégration, il est important de garder à l'esprit les principales propriétés de l'intégrale.

5.3 Calcul d'intégrales

5.3.1 Propriétés de l'intégrale

1. **Relation de CHASLES :** si f est une fonction intégrable sur un intervalle K contenant les valeurs a, b et c alors :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

En effet, si F est une primitive de f sur I alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx &= [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(a)] \\ &= F(c) - F(a) \\ &= \int_a^c f(x)dx \end{aligned}$$

En particulier :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. **Linéarité de l'intégrale :**
   Si λ_1 et λ_2 sont des constantes et f_1, f_2 sont des fonctions alors :
$$\int_a^b [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx$$
3. **Signes de l'intégrale :**
   Considérons f une fonction continue sur un intervalle I et a et b sont deux éléments de I avec $a \leq b$.
   Si f est positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

   Cette propriété résulte de la définition de l'intégrale, pour une fonction positive, comme aire de la surface située sous la courbe représentative de f sur $[a, b]$.

   (a) si $f \geq 0$ sur I alors :
      i. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ si $a \leq b$,
      ii. $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ si $a \geq b$

   (b) si $f \leq 0$ sur I alors :

   (a) $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ si $a \leq b$,

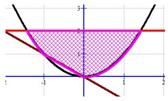
   (b) $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ si $a \geq b$

   Illustration 22 *:*
   sans faire de calcul, déterminer le signe de chacune des intégrales suivantes :
$$J = \int_{-2}^{0} \left(1 + \sin^2 x\right) dx, K = \int_{-2}^{1} \sqrt{x} dx \quad et \quad L = \int_{0.5}^{0.8} \ln x dx$$
4. **Comparaison d'intégrales :**
   Si f et g sont des fonctions intégrables sur $k = [a, b]$ telles que $\forall x \in K, \quad f(x) \geq g(x)$ alors
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$
   En particulier si $f \geq 0$ sur $k = [a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

   Illustration 23 *En utilisant une comparaison d'intégrales, montrons que* $\ln x \leq x - 1$,

   Solution :

   $\forall t \in [1, +\infty[$ on a :
$$\frac{1}{t} \leq 1 \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x 1 dt \Rightarrow \ln x - \ln 1 \leq x - 1 \Rightarrow \ln x \leq x - 1$$



Remarque 27 *On peut, évidemment* ***voir*** *(figure ci-dessous) qu'en représentant graphiquement les fonctions $y_1 = \ln x$ et $y_2 = x - 1$ la courbe représentative de y_1 est en -dessous de la droite représentative de y_2 sur* $[0, +\infty[$

5. **Inégalité de la moyenne :**
Soit f une fonction définie et intégrable sur $K = [a, b]$.
Si m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur K, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

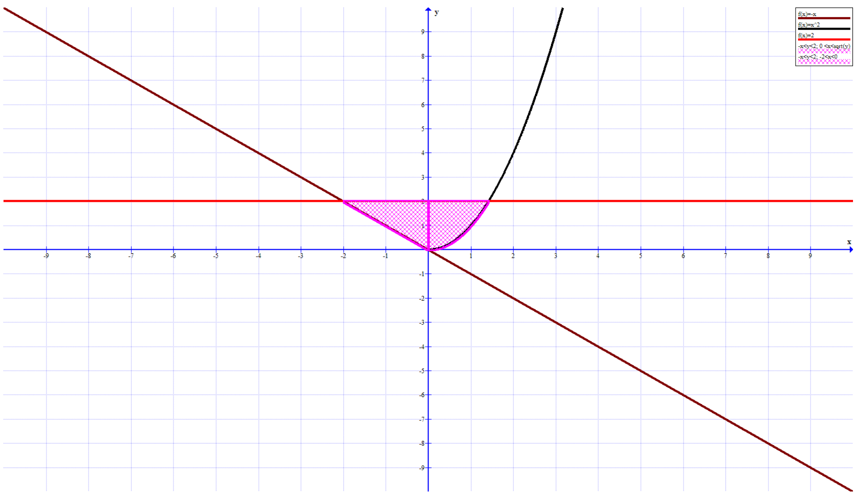
(a) En particulier, il existe $c \in [a, b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = (b-a).f(c)$ et dans ce cas la quantité $f(c)$ s'appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $K = [a, b]$.

(b) L'expression **valeur moyenne** de f sur K signifie aussi que la fonction constante $g(x) = f(c)$ possède la même intégrale que f sur K.

Illustration 24 *La valeur moyenne de $f(x) = \cos x$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est :*

$$\mu = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2}{\pi} \Big(\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) \Big) = \frac{2}{\pi}$$

Ainsi donc, l'intégrale de la fonction constante (représentée par une droite horizontale) $y = \frac{2}{\pi} \approx 0.6366198$ sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est égale à celle de la fonction $f(x) = \cos x$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



5.3.2 Intégrations immédiates

Il convient de remarquer que le calcul d'une intégrale est directement lié à la recherche des primitives.

C'est pour cette raison que les primitives sont appelées **intégrales indéfinies**.

En lisant *de droite à gauche* les formules de dérivation on obtient une première série **d'intégrales immédiates** :

1. $$\int 0dx = c$$

2. $$\int cdx = cx + c'$$

3. $$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

   Plus généralement,
   $$\int x^m dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + c \quad \text{si} \quad m \neq -1$$

   Illustration 25
   $$\int x^9 dx = \frac{1}{10}x^{10} + c$$

4. $$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$$

5. $$\int \cos x dx = \sin x + c$$

6. $$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

7. $$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

9. $$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + c$$

10. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

11.
$$\int e^x dx = e^x + c$$

12.
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$$

Illustration 26 *Calculer chacune des primitives suivantes*

1. $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$
   — ***Indication:*** $\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 3x + c$
2. $\int \left(\sqrt{x} + x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 dx$
   — ***Indication:*** $\frac{1}{2}x^2 + \frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}} + c$
3. $\int 2^x.3^{2x}.5^{3x}dx$
   — ***Indication:*** $\frac{1}{\ln 2250}2250^x + c$
4. $\int \tan^2 x dx$
   — ***Indication:*** $\tan x - x + c$
5. $\int x\sqrt{x}dx$
   — ***Indication:*** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c$
6. $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$
   — ***Indication:*** $2\arcsin x - x + c$

En considérant la dérivation des fonctions hyperboliques, on peut compléter davantage le tableau des intégrales immédiates :

1. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$

2. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

3. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \int \left(1 - \tanh^2 x\right) dx = \tanh x + c$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = Argsinhx + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = Argcoshx + c$

6. $\int \frac{dx}{1-x^2} = Argtanhx + c$

5.3.3 Intégrations par changement de variable

Notions

Soit à calculer, par exemple,

$$I = \int (2x^2 + 6x + 2)^7 (4x + 6)dx$$

Il est vrai que cette intégrale n'est pas immédiate mais si nous posons $t = 2x^2 + 6x + 2$ nous obtenons par différentiation $dt = (4x + 6)dx$ de sorte que l'intégrale initiale devienne :

$$I = \int (2x^2 + 6x + 2)^7 (4x + 6)dx = \int t^7 dt = \frac{1}{8}t^8 + c$$

A ce stade il suffit de remplacer t par sa valeur pour obtenir :

$$\int (2x^2 + 6x + 2)^7 (4x + 6)dx = \frac{1}{8}(2x^2 + 6x + 2)^8 + c$$

Une première version de l'intégration par changement de variable s'obtient en généralisant cet exemple simple.

Il arrive en effet que l'intégrale $\int f(x)dx$ ne soit pas immédiate mais en remarquant que la fonction f sous le signe d'intégration peut se mettre sous la forme $f(x) = g\left(\phi(x)\right) d\phi(x)$ avec $\int g(t)dt$ une intégrale immédiate, il suffit alors d'opérer **le changement de variable** $\phi(x) = t$ pour que l'on obtienne

$$\int f(x)dx = \int g(\phi)d\phi$$

qui est immédiate.

Pour l'exemple liminaire ci-dessus, $\phi(x) = 2x^2 + 6x + 2$ et $g(x) = x^7$.

Il est alors facile de voir que $g \circ \phi = g\left(\phi(x)\right) = g(2x^2 + 6x + 2) = (2x^2 + 6x + 2)^7$
et $d\phi = (4x + 6)dx$ de sorte que

$$\int g(\phi)d\phi = \int f(x)dx$$

avec comme **avantage notable** que l'intégrale de la fonction g (avec comme nouvelle variable ϕ) est immédiate contrairement à la première intégrale (de f avec comme variable x).

A première vue, un tel formalisme peut sembler flou pour certains mais avec un peu d'effort et d'exercices les choses deviennent progressivement limpides.

Illustration 27 *Calculons l'intégrale*

$$I = \int \frac{(\ln t)^4}{t} dt$$

En posant $s = \ln t$ on obtient par différentiation $ds = \frac{dt}{t}$ de sorte que l'intégrale initiale devienne

$$I = \int \frac{(\ln t)^4}{t} dt = \int (\ln t)^4 \frac{(dt}{t} = \int s^4 ds = \frac{1}{5} s^5 + c = \frac{1}{5} (\ln t)^5 + c$$

Illustration 28 *Calciler*

$$I = \int x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx$$

En posant $t = x^3 + 5$ on obtient $dt = 3x^2 dx$ ou encore $x^2 dx = \frac{1}{3} dt$ de sorte que l'on obtient :

$$I = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{9} (x^3 + 5) \sqrt{x^3 + 5} + c$$

Remarque 28 *Supposons que $\int f(x)dx = F(x) + c$. Pour calculer $I = \int f(ax + b)dx$ il suffit de faire le changement de variable $t = ax + b$ c'est-à-dire $dx = \frac{1}{t} dt$ pour obtenir*

$$I = \frac{1}{a} \int f(t) dx = F(t) + c$$

Ainsi, de façon définitive si $\int f(x)dx = F(x) + c$ alors

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$$

Illustration 29 *En appliquant la remarque 28 on obtient par exemple,*

1. $\int \cos x dx = \sin x + c \Rightarrow \int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} sin(ax + b) + c$
2. $\int e^x dx = e^x + c \Rightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$
3. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c \Rightarrow \int \sec(ax + b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$
   (a) *Ainsi par exemple* $\int \sec^2(7x - 2) dx = \frac{1}{7} \tan(7x - 2) + c$

Remarque 29 *:*
la remarque 28 ci-dessus entraine, par exemple que $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$
Ainsi, il est avantageux, lorsque cela est possible (discriminant $\Delta = b^2 - 4ac > 0$), de transformer les fonctions à intégrer, de la forme $\frac{c}{ax^2+bx+c}$ en une somme $\frac{c+1}{x-x_1} + \frac{c_2}{x-x_2}$ afin d'appliquer directement la formule.

Exercice 14 *:*
À titre d'exemple, calculons $I = \frac{dx}{x^2-a^2}$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x - a)(x + a)}$$

En mettant l'expression $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-A)(x+a)}$ sous la forme $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$, trouvons les constantes A et B :

Si $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$ alors $\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{(A+B)x+aA-aB}{(x-a)(x+a)}$. Dans ce cas :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ aA-aB=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{vmatrix}}=\frac{1}{2a} \quad et \quad B=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{vmatrix}}=-\frac{1}{2a}$$

Au final ;

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \int \left(\frac{\frac{1}{2a}}{x-a} - \frac{\frac{1}{2a}}{x+a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a} \\ &= \frac{1}{2a} \left[\ln|x-a| - \ln|x+a| \right] \\ &= \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \end{aligned}$$

Exercice 15 *Faites le changement de variable le mieux indiqué pour calculer*

$$I_1 = \int e^{3\cos x} \sin x dx \quad et \quad I_2 = \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$$

Il existe une autre version de changement de variable qu'on peut appréhender grâce à l'exemple suivant :

Soit à calculer

$$I = \int \frac{dx}{81+x^2}$$

Si nous posons $x = 9\tan t$ c'est-à-dire $\frac{x}{9} = \tan t$ ou encore $t = \arctan \frac{x}{9}$ nous obtenons en différentiant $dx = 9\sec^2 t dt$ et

$$81 + x^2 = 81 + 81 + (9\tan t)^2 = 81 + 81\tan^2 t = 81(1+\tan^2 t) = 81\sec^2 t$$

Nous avons

$$I = \int \frac{dx}{81+x^2} = \int \frac{9\sec^2 t dt}{81\sec^2 t} = \frac{1}{9}\int dt = \frac{1}{9}t + c = \frac{1}{9}\arctan\frac{x}{9} + c$$

En généralisant ce schéma on montre sans difficulté que que pour des intégrales de la forme $I = \frac{dx}{x^2+a^2}$ il suffit de poser $x = a\tan t$ pour avoir

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

A la lumière de cet exemple, notons qu'il arrive aussi que l'intégrale $I = \int f(x)dx$ ne soit pas immédiate mais si on constate qu'en posant $x = \psi(t)$ l'intégrale $I = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt$ devient immédiate on parle aussi d'un changement de variable.

Remarque 30 *L'expérience montre justement, à ce sujet, que pour des intégrales contenant l'expression de la forme :*

1. $a^2 + x^2$ *il est avisé d'essayer le changement de variable* $x = a\tan t$
2. $x^2 - a^2$ *il est avisé d'essayer le changement de variable* $x = a\sec t$
3. $a^2 - x^2$ *il est avisé d'essayer le changement de variable* $x = a\sin t$

Beaucoup d'autres astuces existent et se maîtrisent en faisant beaucoup d'exercices et il est bien entendu important de noter que contrairement aux efforts de dérivation, pour l'apprentissage des intégrales ***il n'existe pas de formule passe-partout et rien ne remplace donc l'habitude de beaucoup s'exercer...***

Intégration utilisant la fonction sec

1. Soit à calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sec x + \tan x)'}{\sec x + \tan x} \\ &= \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} \\ &= \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \\ &= \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \\ &= \sec x \end{aligned}$$

Le calcul ci-dessus nous permet de compléter le tableau des intégrales immédiates par :

$$\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + c \tag{5.5}$$

2. Soit à calculer $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

   (a) Pour $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, faisons, en vertu de la remarque 30, le changement de variable $x = a\tan t \Rightarrow \begin{cases} \tan t = \frac{x}{a} \\ dx = a\sec^2 t dt \end{cases}$

   Dans ce cas,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{a\sec^2 t dt}{\sqrt{a^2\tan^2 t + a^2}} \\ &= \int \frac{a\sec^2 t dt}{\sqrt{a^2(\tan^2 + 1)}} \\ &= \int \frac{a\sec^2 t dt}{\sqrt{a^2\sec^2 t}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{a\sec^2 t dt}{a\sec t} \\
&= \int \sec t dt \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + c \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\tan^2 t} + \tan t\right| + c \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\tan^2 t} + \tan t\right| + c \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a}\right| + c \\
&= \ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right| - \ln a + c \\
&= \ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right| + c
\end{aligned}
$$

(b) Pour $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, faisons le changement de variable (remarque 30) $x = a\sec t \Rightarrow \begin{cases} \sec t = \frac{x}{a} \\ dx = a\sec t \tan t dt \end{cases}$

Dans ce cas,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{a\sec t \tan t dt}{a\sec^2 t - a^2} \\
&= \int \frac{a\sec t \tan t dt}{\sqrt{a^2\left(\sec^2 t - 1\right)}} \\
&= \int \frac{a\sec t \tan t dt}{\sqrt{a^2\tan^2 t}} \\
&= \int \sec t dt \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + c \\
&= \ln\left|\sec t + \sqrt{\sec^2 t - 1}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+c \\
&= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a+c \\
&= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c
\end{aligned}$$

En définitive , nous obtenions :

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c \tag{5.6}$$

5.3.4 Intégration des fonctions rationnelles

Cas de certaines expressions contenant le trinôme ax^2+bx+c

Il existe une approche générale et simple pour aborder des intégrations contenant le trinôme du second degré sous l'une des formes :

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad \int \frac{(cx+d)\,dx}{ax^2+bx+c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \text{ou encore} \quad \int \frac{(cx+d)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx=c}}$$

1. S'agissant de $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

   Il est judicieux, ici, de transformer le dénominateur en l'écrivant sous la forme d'une somme (ou une différence) des deux carrés :

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\mp\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

   En prenant $k^2+\pm\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, on obtient :

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]} \tag{5.7}$$

dans la relation 5.7, il suffit de faire le changement de variable $x + \frac{b}{2a} = t$ i.e. $dx = dt$ pour obtenir la forme

$I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$ qui est est d'une des deux formes immédiate

Exercice 16 : *Calculons* $I = \int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$

Remarquons que :

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+10} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+6} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+6}$$

En posant $x+2=t$ on obtient $dx = dt$. Ainsi

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+6} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) = \frac{\sqrt{6}}{12}\arctan\left[\frac{\sqrt{6}t}{6}\right] + c$$

En définitive,

$$\int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \frac{\sqrt{6}}{12}\arctan\left[\frac{\sqrt{6}\,(x+2)}{6}\right] + c$$

2. Intégrale de la forme $\int \frac{(cx+d)dx}{ax^2+bx+c}$

Pour ce type d'intégrales, il suffit de créer la dérivée du dénominateur au numérateur pour décomposer l'intégrale initiale en une somme des deux intégrales :

$$\frac{cx+d}{ax^2+bx+c} = \frac{\frac{c}{2a}(2ax+b) + \left(d - \frac{cb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}$$

Ainsi,

$$I = \frac{c}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} + \left(d - \frac{cb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

En posant $t = ax^2+bx+c$ i.e. $dt = (2ax+b)\,dx$, le premier terme vaut $\frac{c}{2a}\int \frac{dt}{t} = \frac{c}{2a}\ln t + c = \frac{c}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + c$ tandis que le second est une intégrale du type précédent.

Exercice 17 : *Calculons* $I = \int \frac{(x+3)dx}{x^2-2x-5}$

En appliquant la démarche ci-haut on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+3)dx}{x^2-2x-5} &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+(3-1)}{x^2-2x-5}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)}{x^2-2x-5}dx + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\int \frac{dt}{t^2-6} \quad \text{avec} \quad t = x-1 \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + \frac{4}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-10}\right| + c
\end{aligned}$$

3. Intégrale de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

   Remarquons que l'expression $\frac{1}{\sqrt{ax^2=bx+c}}$ peut se mettre sous la forme :
$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx=c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}}$$

4. Intégrale de la forme $\int \frac{(cx+d)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
   Ainsi,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}} dx$$

   En posant $t = x + \frac{b}{2a}$ on obtient une intégrale de la forme $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}}$ dont on sait qu'elle vaut $\ln\left|x + \sqrt{t \pm a^2}\right| + c$

5. intégrale de la forme $\int \frac{(cx+d)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

   Cette intégrale se ramène facilement aux formes précédentes. En effet,

$$\begin{aligned}
\int \frac{(cx+d)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= \int \frac{\frac{c}{2a}(2ax+b) + \left(d - \frac{cb}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \\
&= \frac{c}{2a} \int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(d - \frac{cb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\
&= \frac{c}{2a} \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(d - \frac{cb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

   Un changement de variable $t = ax^2 + bx + c$ permet de calculer aisément la première intégrale I_1 tandis que la seconde I_2 est déjà traitée . . .

Exercice 18 *: Calculer* $\int \frac{5x-3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4) + (3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx \\
&= \frac{5}{2} \int \frac{(2x+4)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} \\
&= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} \\
&= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln\left|x + 2 + \sqrt{(x+2)^2+6}\right| + c
\end{aligned}$$

Fonctions rationnelles proprement dites

Nous savons qu'une fonction f est dite rationnelle si elle s'écrit comme quotient $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ de deux polynômes P et Q.

Dans leur forme générale, les polynômes P et Q n'ont pas de racine commune. Autrement, si a est une racine commune à P et Q, on en déduirait qu'il existe $P^{'}$ et $Q^{'}$ tels que $P(x) = (x-a)P^{'}(x)$ et $Q(x) = (x-a)Q^{'}(x)$. Dans ce cas l'expression $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ de f serait $f(x) = \frac{P^{'}(x)}{Q^{'}(x)}$.

Définition 39 *: Considérons $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle.*

— *On dit que la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est régulière si le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur.*

— *Dans le cas contraire la fraction f est dite irrégulière .*

À titre d]exemple, la fraction $\frac{x^4-3x}{x^2+2x+3}$ est irrégulière.
En opérant la division euclidienne du numérateur $x^4 - 3x$ par le dénominateur $x^2 + 2x + 3$, on obtient $x^2 - 2x + 1$ comme quotient et $x - 3$ comme reste. Il en résulte que :

$$\frac{x^4 - 3x}{x^2 + 2x + 3} = \left(x^2 - 2x + 1\right) + \frac{x - 3}{x^2 + 2x + 3}$$

De façon générale, si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction irrégulière, la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ conduit à un quotient $p(x)$ et un reste $r(x)$ dont le degré est inférieur à celui du dénominateur $Q(x)$.

Ainsi, une fraction rationnelle irrégulière $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ peut toujours s'écrire comme la somme $f(x) = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$ d'un polynôme $p(x)$ et d'une fonction rationnelle régulière $\frac{r(x)}{Q(x)}$.

Comme les fonctions polynômes $p(x)$ constituent la catégorie des fonctions les plus faciles à intégrer, on retient que les méthodes d'intégration des fonctions rationnelles $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se doivent de se concentrer sur les fonctions rationnelles régulières.

Définition 40 (Elements simples) *:*
Considérons les fonctions rationnelles régulières suivantes :

1. $\frac{c}{c-a}$;

2. $\frac{c}{(x-a)^n}$, *avec* $n \geq 2$;

3. $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ *avec* $n \geq 2$ *et* $\Delta = p^2 - 4q^2 < 0$;

4. $\frac{ax+b}{(x^2+px+c)^n}$ *avec* $n \geq 2$ *et* $\Delta = p^2 - 4q^2 < 0$

Elles sont appelées, respectivement, ***éléments simples de type I, II, III et IV****.*

1. **Intégration des éléments simples de type I**

$$\int \frac{cdx}{x-a} = c\ln|x-a| + c$$

2. **Intégration des éléments simples de type II**

$$\int \frac{cdx}{(x-a)^n} = \int c\,(x-a)^{-n}\,dx$$

Il suffit de remarquer que le changement de variable $t = x - a$ i.e. $dx = dt$ permet d'obtenir $\int \frac{cdx}{(x-a)^n} = \int ct^{-n}dt = \frac{c}{1-n}t^{1-n} + c'$

Au final on obtient :

$$\int \frac{cdx}{(x-a)^n} = \frac{c}{1-n}(x-a)^{1-n} + c' = \frac{c}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c'$$

Exemple 12 *:*

$$\int \frac{3dx}{(x+4)^7} = \frac{3}{(1-7)(x+4)^6} + c = \frac{-1}{2(x+4)^6} + c$$

3. **Intégration des éléments simples de type III**

Soit à calculer $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ avec $n \geq 2$ et $\Delta = p^2 - 4q^2 < 0$

En créant, comme précédemment, au numérateur, la dérivée du trinôme $x^2 + px + q$, on obtient évidemment :

$$\begin{aligned}
\int \frac{(cx+d)dx}{x^2+px+q} &= \int \frac{\frac{c}{2}(2x+p) + \left(d - \frac{cp}{2}\right)}{x^2+px+q}dx \\
&= \frac{c}{2}\int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx + \left(d - \frac{cp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} \\
&= \frac{c}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(d - \frac{cp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} \\
&= \frac{c}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(d - \frac{cp}{2}\right)I'
\end{aligned}$$

Moyennant le changement de variable habituel $x + \frac{p}{2} = t$, la dernière intégrale $I' = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}$ est de la forme $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$

Exemple 13 *: Soit à calculer* $I = \int \frac{(3x+5)dx}{x^2+5x+9}$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{3x+5}{x^2+5x+9}dx \\
&= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+5)+\left(5-\frac{15}{2}\right)}{x^2+5x+9}dx \\
&= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+5)-\frac{5}{2}}{x^2+5x+9}dx \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+5x+9}dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2+5x+9} \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+5x+9\right| - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}
\end{aligned}$$

En posant $t = x+\frac{5}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} &= \int \frac{dt}{t^2+\frac{11}{4}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{11}}\right)+c \\
&= \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{11}t}{11}\right)+c
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+5}{x^2+5x+9}dx &= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+5x+9\right| - \frac{5}{2}\times\frac{2\sqrt{11}}{11}\arctan\left[\frac{2\sqrt{11}\left(\frac{2x+5}{2}\right)}{11}\right]+c \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+5x+9\right| - \frac{5\sqrt{11}}{11}\arctan\left[\frac{\sqrt{11}\,(2x+5)}{11}\right]+c
\end{aligned}$$

4. **S'agissant de l'intégration des éléments simples de type IV, i.e.** $\int \frac{(cx+d)dx}{(x^2+px+q)^n}$,

un petit rappel s'impose sur le rapport de la différentielle d'une fonction sur sa paissance :

Nous savons que pour toute fonction dérivable $u(x)$ on a :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-\left(u^n\right)'}{\left(u^n\right)^2} = \frac{-nu^{n-1}u'}{u^{2n}} = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$$

Comme $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$ alors on a :

$$\frac{u'}{u^{n+1}} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n^{n-1}}\right)' \quad i.e. \quad \frac{u'}{u^n} = \frac{1}{(n-1)}\left(\frac{1}{u^{n-1}}\right)'$$

Ainsi, pour toute fonction dérivable $u(x)$ on a :

$$\frac{du}{u^n} = \left(\frac{-1}{n-1}\right) d\left(\frac{1}{u^{n-1}}\right) \tag{5.8}$$

Le calcul de l'intégration des éléments simples de type IV utilise une importante formule de réduction des intégrales de la forme $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ dont la plus simple est $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$.

$$\begin{aligned}
I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x.xdx}{(x^2+a^2)^n} \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x.\frac{1}{2}(2xdx)}{(x^2+a^2)^n} \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x.\frac{1}{2}d\left(a^2+x^2\right)}{(x^2+a^2)^n} \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int x.\frac{d\left(a^2+x^2\right)}{(x^2+a^2)^n}
\end{aligned}$$

Or, en vertu de la relation 5.8 , $\frac{d\left(x^2+a^2\right)}{(x^2+a^2)^n} = \frac{-1}{n-1}d\left(\frac{1}{u^{n-1}}\right)$. Il en résulte alors que :

$$\begin{aligned}
I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int x.\frac{d\left(a^2+x^2\right)}{(x^2+a^2)^n} \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\int x.d\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]
\end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties ($\int \triangle d\square = \triangle\square - \int \square d\triangle$) on remarque que :

$$\int x.d\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right] = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - I_{n-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\int x.d\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right] \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - I_{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - I_{n-1}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a^2(n-1)}\right] I_{n-1} \\
&= \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \left[\frac{2(n-1)-1}{2a^2(n-1)}\right] I_{n-1} \\
&= \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}
\end{aligned}
$$

On obtient en définitive l'importante formule de réduction des intégrales de la forme $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ qui sont très utiles, comme on va le voir, dans la dernière étape de l'intégration des éléments simples de type IV :

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} \tag{5.9}$$

Exemple 14 *: Soit à calculer* $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+25)^3}$

En utilisant la formule 5.9 on a :

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^3} &= \frac{x}{50.2\left(x^2+25\right)^2} + \frac{3}{50.2} I_2 \\
&= \frac{x}{100\left(x^2+25\right)^2} + \frac{3}{100}\left[\frac{x}{50\left(x^2+25\right)} + \frac{1}{50} I_1\right] \\
&= \frac{x}{100\left(x^2+25\right)^2} + \frac{3x}{5000\left(x^2+25\right)} + \frac{3}{5000} I_1
\end{aligned}
$$

Comme $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+25} = \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{x}{5}\right) + c$, alors au final,

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^3} = \frac{x}{100\left(x^2+25\right)^2} + \frac{3x}{5000\left(x^2+25\right)} + \frac{3}{5000} \times \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{x}{5}\right) + c$$

En revenant à l'intégration des éléments simples de type IV on a :

$$
\begin{aligned}
\int \frac{(cx+d)\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} &= \int \frac{\frac{c}{2}(2x+p) + \left(d - \frac{cp}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^n} dx \\
&= \frac{c}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} + \left(d - \frac{cp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} \\
&= I^{'} + I^{''}
\end{aligned}
$$

Pour $I^{'} = \frac{c}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}$, le changement de variable $t = x^2+px+q$ donne :

$$
\begin{aligned}
I^{'} &= \frac{c}{2}\int \frac{dt}{t^n} \\
&= \frac{c}{2}\int t^{-n}dt \\
&= \frac{c}{2}\frac{1}{(1-n)}t^{1-n}+c \\
&= \frac{c}{2(1-n)t^{n-1}}+c \\
&= \frac{c}{2(1-n)\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+c
\end{aligned}
$$

S'agissant de l'intégrale $I^{''}$ on a :

$$
\begin{aligned}
I^{''} &= \int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} \\
&= \int \frac{dx}{\left[\left(x^2+2x\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n} \\
&= \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}
\end{aligned}
$$

En posant $t=x+\frac{p}{2}$ on obtient :

$$
I^{''}=\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}=\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}=\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^n}\equiv I_n \quad \text{voir} \quad 5.9
$$

Ainsi, la dernière étape de calcul de l'intégrale $I^{''}$ utilisera nécessairement la formule de réduction 5.9 .

Exemple 15 : *Calculer* $I=\int \frac{(x-1)dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$.

$$
\begin{aligned}
I=\int \frac{(x-1)\,dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}-2\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} \\
&= I^{'}+I^{''}
\end{aligned}
$$

Pour $I^{'}=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$, posons $t=x^2+2x+3$, i.e. $dt=(2x+2)dx$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I^{'} &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{t} \\
&= \frac{-1}{2t} \\
&= \frac{-1}{2\left(x^2+2x+3\right)}
\end{aligned}$$

Pour $I^{''} = -2\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$, en transformant le dénominateur on obtient :

$$\begin{aligned}
I^{''} &= -2\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} \\
&= -2\int \frac{dx}{\left[(x+1)^2+2\right]^2} \\
&= -2\int \frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2} \quad \text{en posant} \quad t = x+1
\end{aligned}$$

En vertu de la relation 5.9 ci-haut, ($I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$) on a :

$$\begin{aligned}
I^{''} &= -2\int \frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2} \\
&= -2I_2 \\
&= -2\left[\frac{t}{4.1\left(t^2+2\right)+\frac{1}{4.1}I_1}\right] \\
&= \frac{-t}{2\left(t^2+2\right)} - \frac{1}{2}I_1 \\
&= \frac{-t}{2\left(t^2+2\right)} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c \\
&= \frac{-t}{2\left(t^2+2\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)+c \\
&= \frac{-(x+1)}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left[\frac{\sqrt{2}\,(x+1)}{2}\right]+c
\end{aligned}$$

Au final :

$$I = I^{'} + I^{''}$$

$$= \frac{-1}{2\left(x^2+2x+3\right)} + \frac{-\left(x+1\right)}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left[\frac{\sqrt{2}\left(x+1\right)}{2}\right] + c$$
$$= \frac{-x-2}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left[\frac{\sqrt{2}\left(x+1\right)}{2}\right] + c$$

Ainsi,

$$\int \frac{(x-1)dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} = \frac{-x-2}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left[\frac{\sqrt{2}\left(x+1\right)}{2}\right] + c$$

5.3.5 Changement de variable dans une intégrale définie

Lorsqu'on change la variable d'intégration dans une intégrale définie, il convient de trouver les valeurs des bornes pour la nouvelle variable :

Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 (3x^2+4x+2)^7(6x+4)dx$$

En posant $3x^2+4x+2 = t \Rightarrow (6x+4)dx = dt$

En ce qui concerne les bornes, $x = 0$ sera remplacée par $t = 3.0^2+4.0+2 = 2$ et $x = 1$ sera remplacée par $t = 3.1^2+4.1+2 = 9$

Dans ce cas

$$I = \int_0^1 (3x^2+4x+2)^7(6x+4)dx = \int_2^9 t^7 dt = \frac{1}{8}.9^8 - \frac{1}{8}.2^8 = \frac{9^8-2^8}{8}$$

Exercice 19 *Calculons l'intégrale*

$$I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$$

Posons $x = 2\sin t$ (voir remarque 30 page 119)
$\Rightarrow dx = 2\cos t dt$

$x = 0 \Rightarrow 0 = 2\sin t \Rightarrow t = 0$ et $x = 2 \Rightarrow 2 = 2\sin t \Rightarrow 1 = \sin t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}(2\cos t)dt = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\sin^2 t)}(2\cos t)dt$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = (\pi-0)+(0-0) = \pi$$

5.4 Autres exercices

Calculer chacune des primitives suivantes :

1. $I = \int \frac{dx}{x^2-a^2}$

— Indication de réponse : $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

2. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
   — Indication de réponse :$\arcsin(\frac{x}{a}) + c$
3. $I = \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$
   — Indication de réponse : $-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}\cos^2 x}{3}\right) + c$
4. $I = \int \frac{xdx}{x^4+2x^2+5}$
   — Indication de réponse : $\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1+x^2}{2}\right) + c$
5. $I = \int x^2 e^x dx$
   — Indication de réponse : $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$
6. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$
   — Indication de réponse : $\frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$

5.5 Calcul des surfaces

L'utilisation du calcul intégral dans la recherche des aires des surfaces limitées par des courbes s'appelle *quadrature* et elle est basée sur le principe selon lequel,

— si l'aire A est limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses ainsi que les droites verticales $x = a$ et $x = b$ alors :
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

— si sur l'intervalle concerné, $f(x) \leq g(x)$ alors la surface limitée par les courbes représentatives respectives de ces fonctions est :
$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

— il convient de noter que pour le calcul d'aire la valeur trouvée doit être positive. C'est pourquoi on ne doit pas perdre de vue le fait que l'intégrale d'une fonction sur un intervalle où la courbe est en dessous de l'axes des abscisses est négative et positive dans le cas contraire.

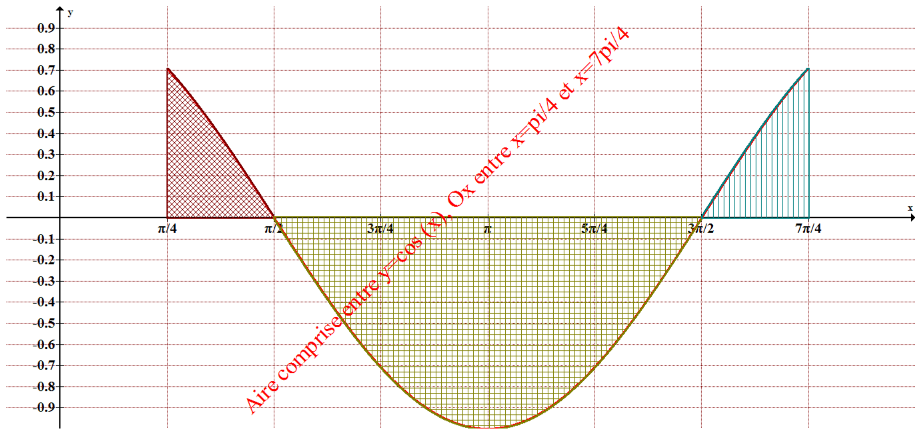
Illustration 30 *Calculer l'aire A limitée par la courbe représentative de $f(x) = \cos x$, l'axe des abscisses ainsi que les droites verticales $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{7\pi}{4}$.*

Solution :

`Première phase: un graphique`

En représentant la courbe de $y = \cos(x)$ entre les abscisses $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{7\pi}{4}$ on obtient :

`Seconde phase: choix judicieux des bornes et calculs`



L'aire totale comporte trois parties A_1, A_2 et A_3 et comme le montre le graphique, A_1 et A_3 sont positives tandis que A_2 est négative.

Pour s'assurer de la positivité de chacune des aires prises en compte on aura :

$$A = A_1 - A_2 + A_3 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ A_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -1 - 1 = -2 \\ A_3 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos(x)dx = [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A &= A_1 - A_2 + A_3 \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos(x)dx \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \\ &= 4 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercice 20 *Calculer l'aire de la surface comprise entre la courbe $y = -x^2$ et $y + x + 2 = 0$.*

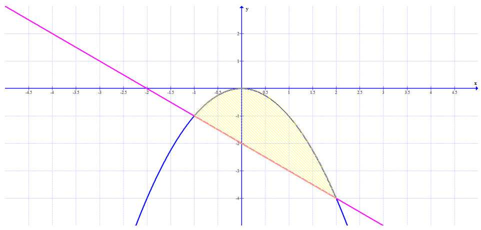
Solution :

`Recherche des bornes d'intégration`

Les coordonnées des points d'intersection entre la parabole $y = -x^2$ et la droite $y + x + 2 = 0$ sont solutions du système

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$$

En résolvant ce système on obtient $x = -1$ et $x = 2$ comme le montre le graphique suivant :



Comme sur l'intervalle $[-1, 2[$ la parabole $y = -x^2$ est au-dessus de la droite $y = -x - 2$ alors l'aire A comprise entre les deux vaut :

$$A = \int_{-1}^{2} \left[-x^2 - (-x-2)\right] dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = \frac{9}{2}$$

Exercice 21 *Soit* $f(x) = x + 2, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \quad$ *et* $\quad h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$
Calculer l'aire comprise entre les représentations graphiques des fonctions f, g *et* h

Indication : $A = \int_1^3 \left((x+2) - (\frac{1}{4}x + \frac{11}{4})\right) dx + \int_3^5 \left((-\frac{1}{2}x + \frac{13}{4}) - (\frac{1}{4}x + \frac{11}{4})\right) dx = 3$

Exercice 22 *Calculons l'aire* A *limitée par la courbe représentative de* $y = \ln x \quad x = 1 \quad$ *et* $\quad x = e$

Solution :

En représentant la fonction $f(x) = \ln x$ entre $x = 1$ et $x = e$ on a :

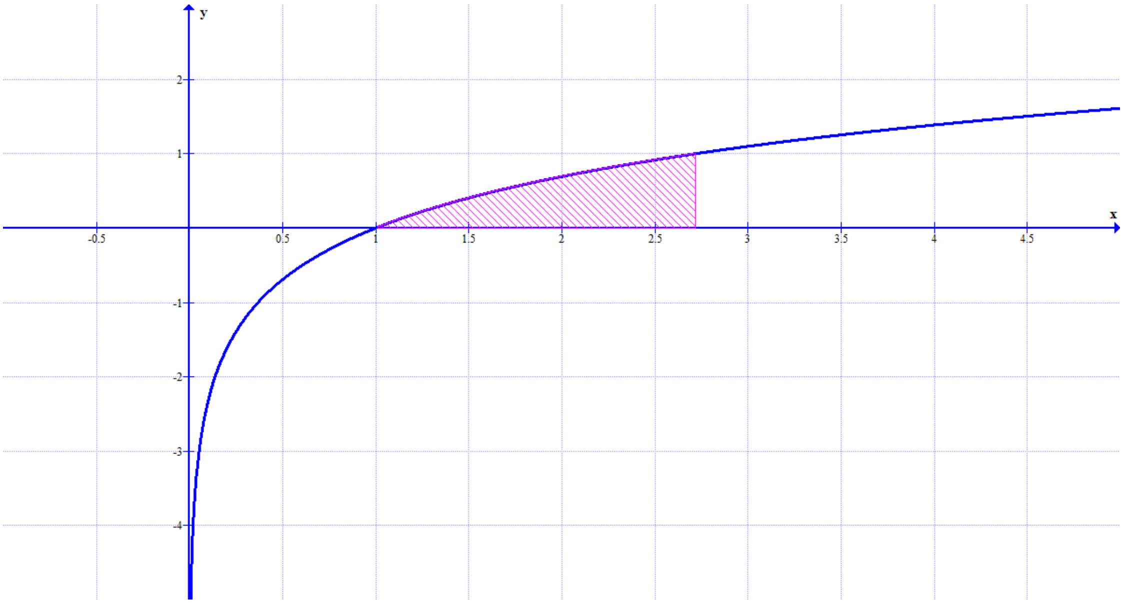
Il en ressort clairement que l'aire A cherchée vaut :

$$A = \int_1^e \ln x dx =?$$

La méthode d'intégration par parties donne :

$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

Il en résulte que :



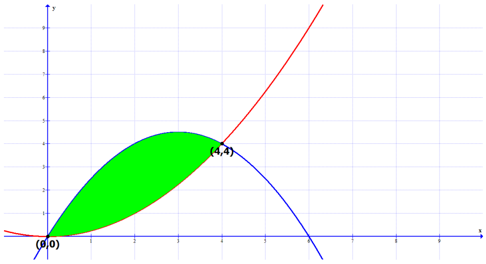
$$\begin{aligned}
A &= \int_1^e \ln x dx \\
&= [uv]_1^e - \int_1^e vdu \\
&= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} \\
&= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e \\
&= (e.\ln e - 1.\ln 1) - (e-1) \\
&= (e-0) - (e-1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exercice 23 *Calculer l'aire limitée par* $y = \frac{16}{x^2}$ *et* $y = 17 - x^2$ *(premier quadrant).*

$$A = \int_1^4 \left((17-x^2) - \frac{16}{x^2}\right) dx = 18$$

Exercice 24 *Calculer l'aire de la surface limitée par les courbes* $y = 0.25x^2$ *et* $y = 3x - 0.5x^2$

Solution :



la résolution du système $\begin{cases} y = 0.025x^2 \\ y^2 = 3x - 0.5x^2 \end{cases}$ donne $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$ comme le confirme la représentation graphique :

Il résulte de cette représentation graphique que l'aire cherchée vaut :

$$A = \int_0^4 \left(3x - 0.5x^2 - 0.25x^2\right) dx = 8$$

Chapitre 6

Equations différentielles ordinaires

6.1 Introduction

Lors de la modélisation de beaucoup de phénomènes économiques et naturels, il arrive souvent qu'on soit dans le besoin de trouver une fonction $y = f(x)$ (ou $y = f(t)$) décrivant l'évolution d'une grandeur d'intérêt y en fonction d'une certaine variable x (ou décrivant l'évolution d'un certain phénomène y en fonction du temps t).
Il est cependant rare qu'on soit à mesure de trouver directement la dépendance entre y et x. Il est généralement plus aisée d'exprimer une relation entre la variable x, la fonction y et le taux de variation $\frac{dy}{dx}$. Considérons, à titre d'exemple introductif que la population d'une certaine région soit de taille 10 000 000 d'habitants en janvier 2012. Pour des raisons de planification, il se pose le besoin d'approximer son évolution future en fonction du temps. Concrètement, on souhaite disposer d'une fonction $P = f(t)$ sensée donner le nombre d'habitants à l'instant t en prenant 2012 comme année d'origine. La seule chose dont nous sommes certain est que $P(0) = 10000000$. Comment trouver l'expression explicite de la fonction $P(t)$? Dans beaucoup de modèle de croissance de la population, on **admet généralement que le taux de croissance d'une population est, à chaque instant, proportionnelle au nombre d'habitants**. Cette hypothèse se traduit mathématiquement par le fait qu'il existe un réel $k > 0$, telle que $\frac{dP}{dt} = P(t) \quad (i)$ tout en sachant que $P(0) = 10000000 \quad (ii)$.
La relation (i) ci-dessus peut s'écrire $dP = Pdt$ ou encore :

$$dP - Pdt = 0 \quad (*)$$

Il s'agit d'une équation dont l'inconnue est une fonction (la fonction $P(t)$) et dont la formulation (i) contient la fonction inconnue ainsi que certaines de ses dérivées : c'est un exemple simple d'équation différentielle. La condition $(ii\ )$ ci-dessus est une condition initiale de l'équation différentielle $(ast\ )$.

6.2 Généralisation et notions fondamentales

De nombreux problèmes d'Economie, de Physique, des Sciences naturelles et d'une autre multitude de domaines s'abordent en faisant intervenir une certaine catégorie d'équations dites différentielles. Comme nous l'avons souligné ci-haut, la nécessité de telles équations vient du fait que le plus souvent, lorsque l'on cherche à modéliser un phénomène par une fonction qui en exprime l'évolution en fonction d'un certain nombre de variables, *il est généralement possible d'exploiter les hypothèses inhérentes au phénomène pour trouver une* *relation liant la fonction inconnue à certaines de ses variables et à certaines de ses dérivées par rapport à ces dernières.*

Une telle équation s'appelle équation différentielle.

— lorsque la fonction inconnue ne dépend que d'une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire.

— lorsque par contre, la fonction inconnue $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dépend de plusieurs variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et que l'équation met en relation cette fonction, certaines de ses variables ainsi que certaines de ses dérivées partielles $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ on parle **d'équations différentielles aux dérivées partielles**.

Dans cette partie nous introduisons uniquement quelques notions de base sur les équations différentielles ordinaires.

Définition 41 *une équation différentielle ordinaire d'ordre n est une relation de la forme*

$$F\left(x, y, y^{'}, y^{''}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

L'ordre d'une équation différentielle est donc celui de la dérivée la plus élevée.
Notons qu'une telle équation peut dans certains cas ne pas contenir x et y et certaines dérivées d ?ordre inférieur à n . Ainsi par exemple, les équations

$$y^{'} + \frac{2}{x}y = \sin x, \quad y^{''} + 4y^{'} + 13y = 0, \quad y^{'''} + yy^{'} = 0$$

sont respectivement du premier, du second et du troisième ordre.

Définition 42 *une équation différentielle est dite linéaire si son premier membre est un polynôme du premier degré par rapport à la fonction inconnue y et ses dérivées $y^{'}, y^{''}, \cdots, y^{(n)}$ (et ne comprend pas de leurs produits).*

En d'autres termes, une équation différentielle linéaire est de la forme :

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

Dans cette expression les fonctions $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x)$, généralement définies sur un intervalle commun sont appelés les **coefficients** de l'équation différentielle linéaire tandis que la fonction $f(x)$ en est le **second membre.** Lorsque le second membre d'une telle équation est identiquement nul $(f(x) = 0, \quad \forall x)$, on dit que l'équation linéaire est **homogène** et dans le cas contraire elle est **non homogène**.

Définition 43 *toute fonction $y = \varphi(x)$ qui vérifie une équation différentielle est une **solution** ou encore une **intégrale**.*

— *Résoudre ou intégrer une équation différentielle donnée revient à en trouver toutes les solutions dans un domaine donné.*

— *La courbe représentative d'une solution d'une équation différentielle s'appelle une **courbe intégrale**.*

Pour mieux appréhender la notion de **solution générale** d'une équation différentielle, considérons l'équation élémentaire, $y^{''} = 0$.
Comme $y^{''} = (y^{'})^{'} = 0$ alors $y^{'} = c_1$, une constante et dans ce cas on a :

$$y^{'} = c_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1 \Rightarrow dy = c_1 dx \Rightarrow y = \int c_1 dx = c_1 x + c_2$$

Ainsi la solution $y(x) = c_1(x) + c_2$ de l'équation différentielle $y'' = 0$ comporte deux constantes arbitraires c_1 et c_2 et *ce n'est pas un hasard si le nombre de constantes arbitraires est exactement égal à l'ordre de l'équation.* Une telle solution s'appelle la **solution générale** de l'équation et dans le cas considéré, elle représente toute une infinité de solutions de l'équation différentielle.

Définition 44 *on appelle **solution générale** d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n la solution $y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ dont le nombre de constantes arbitraires indépendantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ est égal à l'ordre de l'équation.*

Toute solution d'une équation différentielle qu'on obtient à partir de sa solution générale en donnant des valeurs déterminées aux constantes arbitraires qu'elle comporte est appelée **solution particulière** de cette équation.

Exercice 25 *considérons l'équation différentielle $y'' + y = 0$*

Remarquons que si c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires, la fonction $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ vérifie cette équation. En effet :

$$\begin{aligned}
(c_1 \cos x + c_2 \sin x)'' + (c_1 \cos x + c_2 \sin x)' &= (-c_1 \sin x + c_2 \cos x)' + (c_1 \cos x + c_2 \sin x)' \\
&= (-c_1 \cos x - c_2 \sin x) + (c_1 \cos x + c_2 \sin x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ est la solution générale de l'équation $y'' + y = 0$ tandis que, par exemple, $8 \cos x - 7 \sin x$ en est une solution particulière. En donnant aux constantes c_1 et c_2 des valeurs arbitraires on obtient la famille suivante des courbes intégrales :

6.3 Equation différentielle du premier ordre

Une telle équation se présente sous la forme $F(x, y, y^{'}) = 0$ et dans les cas les plus simples, cette équation peut être explicitée par rapport à $y^{'}$ pour avoir $y^{'} = f(x, y)$ ou encore, de manière équivalente :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

La solution générale de cette équation est de la forme $y = \varphi(x, c)$ où c est une constante arbitraire. Géométriquement, la solution générale $y = \varphi(x, c)$ représente une famille de courbes intégrales (voir graphique ci-dessus) correspondant chacune à une valeur précise de la constante c. La relation $y^{'} = f(x, y)$ implique la propriété d'après laquelle en chacun des points $M(x, y)$ de chaque courbe intégrale la pente de la tangente satisfait à la condition $\tan\alpha = f(x, y)$ avec α l'angle formé par la tangente avec la partie positive de l'axe des abscisses. Si on se donne un point $M(x_0, y_0)$ par lequel doit passer une courbe intégrale cela implique le choix d'une courbe correspondant à une solution particulière parmi l'infinité de courbes intégrales. Analytiquement, la donnée du point $M_0(x_0, y_0)$ se ramène à une condition dite initiale : $y = y_0$ pour $x = x_0$. Connaissant la solution générale, la donnée d'une condition initiale conduit, dans les cas les plus simples, à l'équation $y_0 = \varphi(x_0, c)$ grâce à laquelle on détermine la constante c afin d'obtenir la forme explicite de la solution particulière correspondante .

Remarque 31 *La donnée d'une condition initiale pour une équation du premier ordre constitue ce qu'on appelle* **le problème de Cauchy** *du premier ordre qui s'énonce de la manière suivante :* ***Trouver une solution*** $y = \varphi(x)$ ***de l'équation différentielle*** $F(x, y, y^{'}) = 0$ ***qui satisfait à la condition initiale*** $y_0 = \varphi(x_0)$ **.**

Il convient de souligner encore une fois le fait que les équations différentielles constituent un appareil mathématique à l'aide duquel sont étudiés des phénomènes se déroulant dans la nature. Si les hypothèses du problème définissent entièrement un phénomène concret, alors la solution de l'équation différentielle définissant la loi du déroulement du phénomène doit être unique. Il en résulte que la solution générale de l'équation différentielle ne donne pas de réponse, dans ce cas, à la question posée pour la simple raison qu'elle contient des constantes arbitraires. C'est pourquoi pour être adaptées à la résolution des problèmes concrets, les équations différentielles doivent être complétées des conditions supplémentaires. Dans le cas le plus simple, ces conditions supplémentaires sont des **conditions initiales conduisant au problème de Cauchy**.

Il est fréquent de trouver une équation différentielle $F(x, y, y^{'}) = 0$ sous la forme $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$ où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions connues. Signalons qu'il n'existe malheureusement pas de *méthode générale* pour résoudre n'importe quelle équation différentielle, même du premier ordre !

L'étude des équations différentielles consiste généralement à considérer certains types particuliers d'équations et à en étudier les méthodes d'intégration.

6.3.1 Equations différentielles du premier ordre à variables séparées.

Définition 45 *on appelle équation différentielle à variables séparées toute équation de la forme* $M(x)dx + N(y)dy = 0$.

L'expression <u>variables séparées</u> se justifie par le fait que dans cette équation différentielle, l'expression précédant dx ne dépend que de x tandis que celle précédant dy ne dépend que de y.

En intégrant les deux membres de l'équation à variables séparées on obtient

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

qui est la forme implicite de la solution générale de l'équation.

Définition 46 *On appelle équation différentielle à variables séparables, une équation de la forme :*

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy$$

où les fonctions M_1, M_2 ne dépendent que de x alors que les fonctions N_1, N_2 ne dépendent que de y .

Remarquons qu'en divisant l'équation différentielle à variables séparables $M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy$ par l'expression $N_1(y)M_2(x)$ on obtient l'équation à variables séparées :

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

La solution générale de cette dernière est :

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = c$$

Exemples

1. Déterminons la fonction $P(t)$ du problème introductif (voir 6.1 page 137).

   Corrigé :

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= kP \\
&\Rightarrow dP = kPdt \\
&\Rightarrow dP - kPdt = 0 \\
&\Rightarrow \frac{dP}{P} - kdt = 0 \\
&\Rightarrow \int \frac{dP}{P} - \int kdt = c \\
&\Rightarrow \ln P - kt = c \\
&\Rightarrow \ln P = c + kt \\
&\Rightarrow P(t) = e^{c+kt} \\
&\Rightarrow P(t) = e^c e^{kt} \\
&\Rightarrow P(t) = Ce^{kt} \quad \text{car } e^c = c
\end{aligned}$$

En plaçant la condition initiale $P(0) = 10000000$ dans l'expression $P(t) = Ce^{kt}$ on obtient :

$$10000000 = Ce^0 \Rightarrow C = 10000000$$

L'évolution de cette population en fonction du temps (sous cette hypothèse) sera donc décrite par la fonction :

$$P(t) = 10000000e^{kt}$$

Dans cette expression, le paramètre positif k est une caractéristique de la population concernée et sa détermination nécessite une donnée supplémentaire.

2. Soit à résoudre l'équation différentielle $xdx + ydy = 0$

   Solution :
   En remarquant que les variables sont séparées, on obtient comme solution générale :

   $$\int xdx + \int ydy = c \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

   En multipliant cette solution générale par 2, on obtient $x^2 + y^2 = c$, ce qui exprime clairement que cette solution générale représente une famille de cercles concentriques centrés à l'origine.

3. Soit à résoudre l'équation différentielle $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$

   Solution :
   En remarquant qu'il suffit de diviser l'équation par xy pour séparer ses variables, on obtient :

   $$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0 \equiv \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = 0$$

   In en résulte que

   $$\int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = c \Rightarrow \ln x + x + \ln y - y = c$$

   Ou encore $\ln(xy) + x - y = c$

Equations différentielles homogènes du premier ordre

Définition 47 *Nous savons (voir **??** à la page **??**) qu'une fonction $P(x, y)$ est homogène de degré n si quel que soit le nombre k on a l'identité :*

$$P(kx, ky) = k^n P(x, y)$$

Illustration 31 *la fonction $P(x, y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$ est une fonction homogène de degré 2 .*

En effet,

$$P(kx, ky) = 2k^2x^2 - 3k^2xy - 5k^2y^2 = k^2(2x^2 - 3xy - 5y^2) = k^2P(x, y)$$

Définition 48 *Une équation différentielle de la forme $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ est dite homogène si les coefficients $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ des différentielles des variables x et y sont des fonctions homogènes de même degré.*

En divisant l'équation $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ par dx on obtient la relation $P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y)$$

Remarquons dans que dans ce cas la fonction $-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y)$ est homogène de degré zéro. En effet,

$$f(kx,ky) = -\frac{P(kx,ky)}{Q(kx,ky)} = -\frac{k^n P(x,y)}{k^n Q(x,y)} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = k^0 f(x,y)$$

La relation $f(kx,ky) = k^0 f(x,y)$ justifie la deuxième définition, naturellement équivalente à la première qu'on donne des équations homogènes.

Définition 49 *L'équation différentielle du premier ordre $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ est dite homogène si la fonction $f(x,y)$ est homogène de degré zéro.*

Pour résoudre une telle équation, on exploite le fait (voir **??**, page **??**) que $f(kx,ky) = f(x,y)$ pour poser $k = \frac{1}{x}$ et dans ce cas on obtient $f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.
Une équation différentielle homogène $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(1, \frac{y}{x}) \quad (*)$$

Dans cette dernière expression, on fait la substitution :

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x \quad (**)$$

En plaçant la relation (∗∗) dans l'équation différentielle (∗) on obtient l'équation à variables séparables :

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1,u)$$

La séparation des variables donne :

$$u - f(1,u) = -x\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}$$

L'intégration de cette dernière relation donne :

$$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \int \frac{dx}{x} + c$$

En substituant finalement $\frac{y}{x}$ à u après intégration, on obtient la solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$.

Exercice 26 *Soit à résoudre l'équation différentielle* $(x+y)dx + xdy = 0$

1. En faisant allusion à la forme standard $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ pour cette équation on obtient $P(x,y) = x+y$ et $Q(x,y) = x$ qui sont des fonctions homogènes de degré un [1] et il en résulte que cette équation différentielle est homogène au sens de la définition 49 ci-dessus.
2. En la divisant par dx et en explicitant $\frac{dy}{dx}$ on obtient :
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x} = -(1+\frac{y}{x})$$
3. Dans l'équation obtenue $\frac{dy}{dx} = -(1+\frac{y}{x})$ on pose comme le prévoit la théorie, $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$. En plaçant ces expressions dans l'équation différentielle initiale on l'obtient sous la forme :
$$u + x\frac{du}{dx} = -(1+u) \Rightarrow xdu = (-1-2u)dx \Rightarrow \frac{du}{1+2u} = -\frac{dx}{x}$$
En intégrant la dernière expression on obtient :
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2u+1) = -\ln x + c \Rightarrow \ln(2u+1) = -2\ln x + \ln c = \ln\left(\frac{c}{x^2}\right)$$
Il en résulte que
$$2u+1 = \frac{c}{x^2} \Rightarrow \frac{2y}{x} + 1 = \frac{c}{x^2}$$
Il en résulte en définitive que
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{c_1}{x} \quad \text{en notant} \quad c_1 = \frac{1}{2}c$$

Exercice 27 *Résoudre l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2-y^2}$

Solution :

Comme le second membre est une fonction homogène de degré zéro, l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2-y^2}$ est homogène au sens de la définition 49.

- En posant $u = \frac{y}{x}$, on obtient $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ et en plaçant ces expressions dans l'équation initiale on obtient :
$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1-u^2}$$
- en séparant les variables on obtient :
$$\frac{(1-u^2)du}{u^3} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}$$
- L'intégration de cette relation donne :
$$-\frac{1}{2u^2} - \ln u = \ln x + \ln c \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = \ln uxc$$
- en remplaçant u par $\frac{y}{x}$ on obtient sous forme implicite l'intégrale générale de l'équation initiale :
$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln(cx)$$

1. La vérification est triviale.

6.3.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre.

En particularisant la définition générale 42 à la page 138, on obtient la définition suivante :

Définition 50 *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme* $a(x)y^{'}+b(x)y+c(x)=0$ *où* $a(x), b(x)$ *et* $c(x)$ *sont des fonctions données.*

Comme $a(x)\neq 0$ (sinon cette équation n'aurait rien de différentiel), cette équation peut se mettre sous forme réduite (en divisant par $a(x)$) :

$$y^{'}+py=f(x) \quad avec \quad p(x)=\frac{b(x)}{a(x)} \quad \text{et} \quad f(x)=\frac{-c(x)}{a(x)}$$

Pour résoudre l'équation ($*$), représentons la fonction cherchée y par le produit des deux facteurs : $y=uv$ où u est une solution non nulle de l'équation homogène correspondantes $u^{'}+p(x)u=0$ et v une nouvelle fonction inconnue.

$$y=uv\Rightarrow y^{'}=vu^{'}+uv^{'}$$

En revenant à l'équation différentielle initiale on obtient :

$$y^{'}+p(x)y=f(x)\Rightarrow vu^{'}+uv^{'}+p(x)uv=f(x)$$

En mettant v en évidence dans le premier et le troisième terme, on obtient :

$$v\left(u^{'}+p(x)u\right)+uv^{'}=f(x)$$

En tenant compte du fait que la fonction u est une solution particulière de l'équation homogène associée on obtient le système :

$$\begin{cases} u^{'}+p(x)u \\ uv^{'}=f(x) \end{cases}$$

L'équation (i) de ce système permet de trouver une solution particulière de u qu'on place dans (ii) pour trouver une solution générale de v et former, en définitive, la solution $y=uv$ de l'équation différentielle $y^{'}+py=f(x)$

Exemples

1. Soit à résoudre l'équation différentielle $xy^{'}+2y=x^2$.

   Solution :
   En divisant cette équation par x on l'obtient sous la forme standard $y^{'}+\frac{2}{x}y=x$ où en posant $y=uv\Rightarrow y^{'}=uv^{'}+u^{'}v$ on obtient

$$u^{'}v+uv^{'}+\frac{2}{x}uv=x\Rightarrow v\left(u^{'}+\frac{2}{x}u\right)+uv^{'}=x$$

En suivant les étapes décrites ci-dessus on obtient le système :

$$\begin{cases} u^{'} + \frac{2}{x}u = 0 \quad (i) \\ uv^{'} = x \quad (ii) \end{cases}$$

L'équation (i) donne

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x}u \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{2}{x}dx \Rightarrow u(x) = \frac{1}{x^2}$$

Cette solution particulière de (i) placée dans (ii) donne :

$$\frac{1}{x^2}\frac{dv}{dx} = x \Rightarrow dv = x^3 dx \Rightarrow v(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$$

.

On en déduit que :

$$y(x) = u(x)v(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4}x^4 + c\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2} \quad c \text{ étant une constante arbitraire}$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

Solution :
En posant $y = uv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = uv^{'} + u^{'}v$ on obtient :

$$uv^{'} + u^{'}v - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3 \Rightarrow v\left(u^{'} - \frac{2}{x+1}u\right) + uv^{'} = (x+1)^3$$

On en déduit le système :

$$\begin{cases} u^{'} - \frac{2}{x+1}u = 0 \quad (i) \\ uv^{'} = (x+1)^3 \quad (ii) \end{cases}$$

L'équation (i) , à variables séparables donne :

$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{x+1}u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = 2\frac{dx}{x+1} \Rightarrow \ln u = \ln\left[(x+1)^2\right] \Rightarrow u = (x+1)^2$$

En plaçant cette expression dans (ii) on obtient :

$$(x+1)^2\frac{dv}{dx} = (x+1)^3 \Rightarrow dv = (x+1)dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}(x+1)^2 + c$$

La solution générale est donc :

$$y = u(x) \times v(x) = (x+1)^2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2 + c\right] = \frac{(x+1)^4}{2} + c(x+1)^2$$

6.3.3 Equation de Bernoulli

Définition 51 *On appelle équation de Bernoulli une équation différentielle de la forme* $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$ *où* $p(x)$ *et* $q(x)$ *sont des fonctions continues de* x *(ou même des constantes) et* $n \neq 0, n \neq 1$ *(sinon on aurait une équation linéaire).*

L'équation de Bernoulli se ramène aisément à une équation linéaire.

Il suffit pour cela de la diviser par y^n pour obtenir :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{-n+1} = q(x) \quad (*)$$

En faisant ensuite dans ($*$) la substitution $z = y^{-n+1}$ on obtient $\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ qui, substituée dans l'équation ($*$) donne :

$$\frac{1}{-n+1}\frac{dz}{dx} + pz = q$$

Cette dernière équation étant linéaire en z, donne la fonction z dont on déduit y.

Illustration 32 *Résolvons l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} + yx = x^3y^3$

Solution :

— En divisant cette équation par y^3 on obtient :

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3 \quad (*)$$

— En posant $z = y^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ on obtient en substituant cette relation dans ($*$) :

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3 \quad (**)$$

— L'équation ($**$) étant linéaire, il suffit d'y poser $z = uv \Rightarrow \frac{dz}{dx} = u'v + uv'$ et dans ce cas l'équation ($**$) devient :

$$u'v + uv' - 2xuv = -2x^3 \Rightarrow v\left(u' - 2xu\right) + uv' = -2x^3$$

La partie $u' - 2xu = 0$ donne $u(x) = e^{x^2}$ et dans ce cas la partie $uv' = -2x^3$ devient :

$$e^{x^2}\frac{dv}{dx} = -2x^3 \Rightarrow dv = -2x^3e^{-x^2} \Rightarrow v = \int -2x^3e^{-x^2}dx$$

Résolvons l'intégrale $v = \int -2x^3e^{-x^2}dx$ par parties :

$$v = \int -2x^3e^{-x^2}dx = \int x^2\left(-2xe^{-x^2}dx\right)$$

$$a = x^2 \Rightarrow da = 2xdx$$
$$b = e^{-x^2} \Leftarrow db = -2xe^{-x^2}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} v(x) &= ab - \int bda \\ &= x^2e^{-x^2} - \int e^{-x^2} 2xdx \\ &= x^2e^{-x^2} + \int e^{-x^2} (-2xdx) \\ &= x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c \end{aligned}$$

Il en résulte que la solution générale de l'équation linéaire $(**)$ est :

$$\begin{aligned} z(x) &= u(x) \times v(x) \\ &= e^{x^2} \left(x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c\right) \\ &= x^2 + 1 + ce^{x^2} \end{aligned}$$

La relation $z = y^{-2}$ donne :

$$\begin{aligned} y^{-2} &= x^2 + 1 + ce^{x^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{y^2} = x^2 + 1 + ce^{x^2} \\ &\Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2 + 1 + ce^{x^2}} \\ &\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + ce^{x^2}}} \end{aligned}$$

La fonction $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1+ce^{x^2}}}$ est la solution générale de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} + yx = x^3y^3$

6.4 Equations différentielles du second ordre

6.4.1 Notions de base

Une équation différentielle du second ordre, résolue par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé, se présente sous la forme générale suivante :

$$y^{''} = f\left(x, y, y^{'}\right)$$

La solution générale $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ d'une telle équation comporte deux constantes arbitraires c_1, c_2 .

Par chaque point $M(x_0, y_0)$ du plan $\mathbb{R}^2$ il passe en général un faisceau de courbes intégrales. Ainsi, pour extraire de cette famille de courbes intégrales une courbe intégrale déterminée $\Gamma(x)$, il ne suffit pas (contrairement aux équations du premier ordre) de préciser un point $M(x_0, y_0)$ par lequel elle passe. Il faut en plus spécifier la direction dans laquelle la courbe $\Gamma(x)$ passe par le point $M(x_0, y_0)$, c'est-à-dire donner la pente de la tangente à la courbe $\Gamma(x)$ au point d'abscisse x_0.

Analytiquement, il est nécessaire de disposer des conditions initiales de la forme : $y = y_0, y' = y'_0$ pour $x = x_0$.

6.4.2 Quelques types d'équations du second ordre

Equations de la forme $y'' = f(x)$

Il est évident que :

$$y'' = f(x) \Rightarrow y' = \int f(x)dx + c_1 \Rightarrow y(x) = \int \left[\int f(x)dx + c_1\right] dx + c_2$$

Equations de la forme $y'' = f(y)$

En posant $y' = p$ et en considérant p comme une fonction de y on obtient :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

L'équation $y'' = f(y)$ prend alors la forme :

$$p\frac{dp}{dy} = f(y)$$

En séparant les variables dans cette dernière équation on obtient :

$$pdp = f(y)dy \Rightarrow \frac{p^2}{2} = \int f(y)dy + c_1$$

Cette dernière relation donne alors :

$$p = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + c_1}$$

Comme $p = \frac{dy}{dx}$ alors l'équation différentielle initiale s'écrit :

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + c_1}$$

En faisant une nouvelle séparation des variables et une nouvelle intégration on obtient finalement :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + c_1}} = \pm(x + c_2)$$

Nous recommandons aux étudiants de ne pas *céder à la tentation* de retenir cette formule étant donné qu ?il est plus avantageux d'assimiler ce procédé d'intégration.

Illustration 33 *Résolvons l'équation* $y^{''} = y^{-3} \quad (i)$

Corrigé :
En posant $y^{'} = p$ on obtient comme annoncé :

$$y^{''} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p \quad (ii)$$

En portant la relation (ii) dans (i) on obtient :

$$\frac{dp}{dy}p = y^{-3} \quad (iii)$$

En séparant les variables dans (iii) on obtient sans peine :

$$pdp = y^{-3}dy \Rightarrow \frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{c_1}{2} \Rightarrow p = \pm\sqrt{c_1 - y^{-2}} \quad (iv)$$

En remplaçant p par $\frac{dy}{dx}$ dans la relation (iv) , on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{c_1y^2 - 1}}{y} \quad (v)$$

En séparant les variables dans l'équation différentielle (v) on obtient :

$$\frac{ydy}{\sqrt{c_1y^2 - 1}} = \pm dx \Rightarrow \frac{c_1ydy}{\sqrt{c_1y^2 - 1}} = \pm c_1dx \quad (vi)$$

En intégrant l'équation (vi) on obtient :

$$\int \frac{c_1ydy}{\sqrt{c_1y^2 - 1}} = \pm(c_1x + c_2) \Rightarrow \sqrt{c_1y^2 - 1} = \pm(c_1x + c_2)$$

En définitive :

$$c_1y^2 - 1 = (c_1x + c_2)^2$$

Equations de la forme $y^{''} = f(y^{'})$

Pour ce genre d'équations il est recommandé de poser $y^{'} = p \Rightarrow y^{''} = \frac{dp}{dx}$ et alors l'équation initiale devient :

$$\frac{dp}{dx} = f(p) \quad (i)$$

En séparant les variables dans (i) on obtient :

$$\frac{dp}{f(p)} = dx \Rightarrow \int \frac{dp}{f(p)} = x + c_1 \quad (ii)$$

Pour résumer la démarche, précisons qu'il suffit d'intégrer (ii) pour déterminer la quantité $p = \frac{dy}{dx}$ qu'on intègre une fois de plus pour trouver la fonction y.

Illustration 34 *Trouver la solution de l'équation différentielle* $2y^{'}y^{''} = 1$ *qui satisfait aux conditions initiales* $y = 0, y^{'} = 1$ *pour* $x = 1$

Solution :

En posant $y^{'} = p \Rightarrow y^{''} = \frac{dp}{dx}$ on obtient :

$$2p\frac{dp}{dx} = 1 \quad (i)$$

En séparant les variables dans (i) on obtient l'équation :

$$2pdp = dx \Rightarrow p^2 = x + c_1 \quad (ii)$$

Pour déterminer la constante c_1 , utilisons la condition initiale $p = y^{'} = 1$ pour $x = 1$, on a $1 = 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$ et donc :

$$p^2 = x \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = +\sqrt{x} \quad (iii)$$

Le choix du signe $+$ dans la relation (iii) tient à ce que pour $x = 1$ nous devons avoir $p = 1$.
En séparant les variables dans la relation (iii) on obtient :

$$dy = \sqrt{x}dx \Rightarrow y = \int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c_2 \quad (iv)$$

Pour déterminer la constante c_2 , posons $x = 1$ et $y = 0$, pour obtenir $c_2 = -\frac{2}{3}$.
La solution cherchée est alors

$$y(x) = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

6.4.3 Equations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

Les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants sont un cas particulièrement simple des équations différentielles linéaires homogènes.

Pour ces dernières, il existe une importante propriété générale qui permet d'accéder facilement à la solution générale lorsque l'on considère le cas particulier des coefficients constants.

Considérons une équation différentielle linéaire homogène du second ordre :

$$y^{''} + p(x)y^{'} + q(x)y = 0 \quad (i)$$

Les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ de l'équation (i) sont des fonctions continues.

Considérons $y_1(x)$ et $y_2(x)$ des solutions particulières de cette équation (i) .

On dit que deux solutions et sont linéairement dépendantes, s'il est possibles de choisir des constantes et qui ne sont pas simultanément nuls et telle qu'une combinaison linéaire de ces fonctions soit égale à zéro (fonction nulle), c'est-à-dire :

$$\exists, a_1, a_2 \in \mathbb{R} : a_1y_1 + a_2y_2 \equiv 0$$

Dans le cas contraire, ces deux solutions sont dites linéairement indépendantes ssi

$$a_1y_1 + a_2y_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Exemple : les fonctions $f_1(x) = e^{k_1x}$ et $f_2(x) = e^{k_2x}$ sont linéairement indépendantes pour $k_1 \neq k_2$.

Connaissant deux solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation différentielle (i) , on peut facilement en obtenir la solution générale. Il suffit pour cela, d'utiliser le résultat suivant :

Proposition 26 *Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des solutions particulière de l'équation différentielle (i) alors la solution générale de cette équation est une combinaison linéaire de ces solutions particulières.*

En d'autres termes, la solution générale de l'équation est de la forme :

$$f(x) = c_1y_1 + c_2y_2$$

Considérons maintenant le cas où les coefficients sont constants. Nous avons alors une équation de la forme :

$$y^{''} + py^{'} + qy = 0 \quad (*) \quad \text{avec p et q des constantes}$$

Cherchons une solution particulière de l'équation $(*)$ sous la forme $y = e^{kx}$ où k est un nombre constant à déterminer.

Comme $y = e^{kx}$ alors $y^{'} = ke^{kx}$ et $y^{''} = k^2e^{kx}$. En introduisant ces dernières expressions dans l'équation $(*)$ on obtient :

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \Rightarrow \left(k^2 + pk + q\right) e^{kx} = 0 \quad (ii)$$

En simplifiant par l'expression non nulle e^{kx} la relation (ii) donne :

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (iii)$$

L'équation du second degré (iii) à partir de laquelle on détermine la constante k sappelle **équation caractéristique** de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $(*)$.

Comme (iii) est une équation du second degré, on en cherche le discriminant $\Delta = p^2 - 4q$ et trois cas sont évidemment envisageables :

1. $\Delta = p^2 - 4q > 0$
   alors l'équation caractéristique admet deux racines $k_1 \neq k_2$ et dans ces cas les solutions particulières $y_1 = e^{k_1x}$ et $y_1 = e^{k_2x}$ sont linéairement indépendantes.
   Il en résulte alors que l'équation différentielle $y^{''} + py^{'} + qy = 0$ admet comme solution générale :

   $$f(x) = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$$

   Illustration 35 *l'équation différentielle $y^{''} - 2y^{'} - 8y = 0$ admet comme solution générale $f(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x}$*

2. $\Delta = p^2 - 4q = 0$
   Il est évident que dans ce cas, l'équation caractéristique admet une seule racine $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$.
   Il en résulte que l'une des solutions particulières est :

   $$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$$

Toute autre solution particulière y_2 , linéairement indépendante de y_1 , sera nécessairement de la forme $y_2 = y_1 \times z(x)$ où z est une fonction de x qui n'est pas identiquement une constante.
Considérons $y_2 = e^{-\frac{p}{2}x}z$
En dérivant successivement $y_2(x)$ on obtient d'une part :

$$y_2^{'}(x) = e^{-\frac{p}{2}x}z^{'} + e^{-\frac{p}{2}x}.(-\frac{p}{2})z = e^{-\frac{p}{2}x}\left(z^{'} - \frac{p}{2}z\right)$$

D'autre part :

$$y_2^{''} = e^{-\frac{p}{2}x}\left(z^{''} - \frac{p}{2}z^{'}\right) - \frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x}\left(z^{'} - \frac{p}{2}z\right) = e^{-\frac{p}{2}x}\left(z^{''} - pz^{'} + \frac{p^2}{4}z\right)$$

En introduisant ces expressions respectives de $y_2, y_2^{'}, y_2^{''}$ dans l'équation différentielle initiale, on obtient après simplification par le facteur commun $e^{-\frac{p}{2}x}$,

$$z^{''} - pz^{'} + \frac{p^2}{4}z + pz^{'} - \frac{p^2}{2}z + qz = 0$$

Cette expression est équivalente à :

$$z^{''} + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)z = 0 \Rightarrow 4z^{''} - \left(p^2 - 4q\right)z = 0 \quad (**)$$

Comme dans ce cas $\Delta = 0$, alors l'équation $(**)$ implique que $4z^{''} = 0 \Rightarrow z^{''} = 0$.
Il résulte de cette dernière équation que $z^{'} = a$ et par conséquent $z(x) = ax + b$ où a et b sont des constantes arbitraires.
De ce qui précède, on déduit alors que

$$y_2(x) = (ax + b)\,e^{-\frac{px}{2}}$$

Comme il est suffisant à ce stade de disposer d'une solution particulière linéairement indépendante à la première, on prend généralement $a = 1$ et $b = 0$ pour avoir :

$$y_2(x) = xe^{-\frac{px}{2}}$$

La solution générale de l'équation différentielle initiale est donc de la forme :

$$f(x) = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-\frac{p}{2}x} + c_2xe^{-\frac{px}{2}} = (c_1 + c_2x)\,e^{-\frac{p}{2}x}$$

Illustration 36 *Résoudre l'équation différentielle* $y^{''} - 6y^{'} + 9y = 0$

Solution :

Comme l'équation caractéristique $k^2 - 6k + 9 = 0$ possède une seule solution $k = 3$ alors la solution générale est :

$$y = (c_1 + c_2x)\,e^{3x}$$

3. $\Delta = p^2 - 4q < 0$

   Il est évident que lorsque le discriminant est strictement négatif, l'équation caractéristique admet deux racines complexes (appartenant à l'ensemble $\mathbb{C}$) conjuguées de la forme :

$$k_1 = \alpha + \beta i \quad \text{et} \quad k_2 = \alpha - \beta i \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{p}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{-\Delta}$$

   On démontre dans ce cas que la solution générale de l'équation différentielle initiale peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = [c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)]\, e^{\alpha x}$$

   Illustration 37 *Résolvons l'équation différentielle* $y^{''} - 6y^{'} + 13y = 0$

   Son équation caractéristique est $k^2 - 6k + 13 = 0$ et a comme discriminant $\Delta = 36 - 52 = -16 < 0$. En remarquant dans ce cas que l'équation caractéristique ci-dessus admet deux racines complexes conjuguées $k_{1,2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$, on déduit de la théorie ci-dessus que $\alpha = 3$ et $\beta = 2$ de sorte que la solution générale est de la forme :

$$f(x) = e^{3x}\, [c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)]$$

6.4.4 Equations différentielles linéaires non homogènes du second ordre à coefficients constants

Considérons une équation différentielle linéaire non homogène (c'est-à-dire avec second membre) du second ordre :

$$y^{''} + py^{'} + qy = f(x) \quad (i)$$

Dans cette équation p et q sont des constantes données et le second membre $f(x)$ est une fonction continue.

On démontre [2] que **la solution générale de l'équation non homogène (i) s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène associée $y^{''} + py^{'} + qy = 0$ une solution particulière de l'équation (i) .**

En d'autres termes, si $g(x)$ est la solution générale de l'équation homogène associée et $z(x)$ est une solution particulière de l'équation (i) alors la solution générale de (i) est de la forme :

$$f(x) = g(x) + z(x)$$

Comme nous savons déjà trouver la solution générale de l'équation homogène, il est question à ce stade de savoir obtenir une solution particulière de l'équation $y^{''} + py^{'} + qy = f(x)$.

Il est facile de deviner que la recherche de cette solution particulière dépendra étroitement de la forme de la fonction $f(x)$.

On applique généralement une *méthode dite des coefficients indéterminés.*

Limitons-nous à examiner quelques cas simples.

2. Nous omettons volontairement la démonstration pour ne pas nuire à l'enchainement linéaire de l'exposé de l'idée principale mais les étudiants intéressés peuvent en trouver une longue mais très claire aux pages 502 -509 du vieux ouvrage [?] de la Bibliographie de **V. Koudriavtsev** et **B. Démidovitch**, disponible à la Faculté des Sciences de l'Université Catholique de Bukavu.

— Le second membre $f(x)$ est une fonction exponentielle $f(x) = ae^{mx}$ avec $a \neq 0$.
Cherchons la solution particulière z sous forme exponentielle $z = Ae^{mx}$ où A est un coefficient indéterminé (inconnue).
En dérivant cette solution particulière potentielle on obtient sans peine :

$$z^{'} = Ame^{mx} \quad \text{et} \quad z^{''} = Am^2e^{mx}$$

En portant les expressions respectives de $f(x)$, de $z(x)$ et ses dérivées dans l'équation avec second membre, on obtient :

$$Am^2e^{mx} + pAme^{mx} + qAe^{mx} = ae^{mx} \Rightarrow \left[A(m^2 + pm + q)\right] e^{mx} = ae^{mx}$$

En simplifiant cette dernière égalité par la quantité e^{mx} , on obtient la relation :

$$A(m^2 + pm + q) = a$$

Relativement à cette relation, deux cas sont envisageables :

1. si le nombre réel m n'est pas racine de l'équation caractéristique, c'est-à-dire, si $m^2 + pm + q \neq 0$ alors $A = \frac{a}{m^2+pm+q}$ de sorte que l'on obtient une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme :
$$z = \frac{ae^{mx}}{m^2 + pm + q}$$
2. Il peut arriver que le nombre réel m soit racine de l'équation caractéristique, c'est-à-dire, si $m^2 + pm + q = 0$ alors l'équation $A(m^2 + pm + q) = a$ est incohérente et dans ce cas l'équation avec second membre n'admet pas de solution particulière sous la forme $z = Ae^{mx}$.

On démontre dans ce sous-cas (nous n'exploitons pas tous les détails dans ces notes) que si m est une racine simple de l'équation caractéristique, il convient de prendre une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $z(x) = Axe^{mx}$
On dérive comme précédemment z et on place sa dérivée première et sa dérivée seconde dans l?équation différentielle initiale et on applique la méthode des coefficients indéterminés.
Si par contre m est une racine double de l'équation caractéristique il est recommandé de chercher une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $z(x) = Axe^{mx}$
Illustration 38 *Soit à résoudre l'équation différentielle* $y^{''} - 5y^{'} + 6y = e^x$
L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $k^2 - 5k + 6 = 0$ et possède deux racines distinctes $k_1 = 2$ et $k_2 = 3$ de sorte que la solution générale de l'équation homogène associée est :

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

Comme le second membre est de la forme e^{mx} avec $m = 1$ et comme en plus $m = 1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique ($1^2 - 5 \times 1 + 6 \neq 0$), la recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre sous forme $z(x) = Ae^x$ donne $A = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $z(x) = \frac{1}{2}e^x$.
De tout ce qui précède on déduit que la solution générale de l'équation différentielle $y^{''} - 5y^{'} + 6y = e^x$ est :

$$f(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{2}e^x$$

— Le second membre $f(x)$ de l'équation différentielle $y^{''} + py^{'} + qy = f(x)$ est un polynôme trigonométrique $f(x) = M\cos\omega x + N\sin\omega x$
Il convient dans ce cas de chercher la solution particulière de l'équation avec second membre, également sous la forme $z(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, où A et B sont des fonctions à déterminer.
En dérivant la fonction z on obtient successivement :

$$z^{'} = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x \quad \text{et} \quad z^{''} = -A\omega^2\cos\omega x - B\omega^2\sin\omega x$$

En plaçant ces relations dans l'équation $y^{''} + py^{'} + qy = f(x)$, on obtient sans peine :

$$(-A\omega^2 + Bp\omega + Aq)\cos\omega x + (-B\omega^2 - Ap\omega + Bq)\sin\omega x = M\cos\omega x + N\sin\omega x$$

En égalant dans les coefficients des termes semblables dans cette relation, on obtient le système :

$$\begin{cases} A(q-\omega^2) + Bp\omega = M \\ -Ap\omega + B(q-\omega^2) = N \end{cases}$$

C'est en général à partir de ce système qu'on détermine les coefficients A et B mais s'il arrive (rare) qu'il n'admette pas de solution il est recommandé d'appliquer la même stratégie avec cette fois $z(x) = x\,(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ comme *fonction candidate au titre de solution particulière* de l'équation avec second membre.
C'est plus long que difficile et ça marche généralement pour autant qu'on ne commet pas d'erreur aussi bien dans les dérivations, l'identification des coefficients en bien entendu la résolution du système d'équations linéaires dont les inconnues sont les coefficients.
Illustration 39 *Résoudre l'équation différentielle* $y^{''} - 4y^{'} + 4y = \cos x$
Indication de réponse :

$$f(x) = (c_1 + c_2x)\,e^{2x} + \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x$$

Remarque 32 *Il convient de souligner que pour les équations différentielles linéaires non homogènes du second ordre à coefficients constants on peut discuter différents cas selon la forme du second membre mais tous ces cas ont en commun le fait que l'on cherche une solution particulière $z(x)$ ayant la même forme que le second membre $f(x)$ afin de faciliter d'avance l'identification des coefficients des termes semblables pour déterminer les coefficients indéterminés intervenant dans $z(x)$*

6.5 Quelques applications des équations différentielles

6.5.1 Exemple d'utilisation des équations aux variables séparables dans la description de la croissance démographique

Dans un rapport des Nations Unies (voir [?], page 76), la population de l'Europe est estimée à 641 millions d'habitants en 1960, et à 689 millions d'habitants en 1970.

Dans les efforts (planification oblige) de trouver une fonction $P(t)$ qui exprime le nombre d'habitants en Europe en fonction du temps, plusieurs tentatives sont de primes abords possibles.

1. On peut vouloir trouver une fonction linéaire $P(t) = ax + b$ et exploiter les données ci-haut pour calculer les coefficients a et b . On considérerait dans ce cas que la représentation graphique de l'évolution de cette population est une droite qui passe par les points $(1960, 641)$ et $(1970, 689)$ et dans ce cas on aurait évidemment :

$$P - 641 = \frac{689 - 641}{1970 - 1960}(t - 1960) \equiv P(t) = 641 + \frac{48}{10}(t - 1960)$$

   Selon cette approche, l'évolution de la population d ?Europe serait donc représentée par la fonction $P(t) = 4.8t + 10049$

   Ce modèle[3] présente des lacunes flagrantes dans la mesure où la fonction $P(t) = 4.8t + 10049$ à laquelle il conduit traduit que la croissance annuelle de la population d'Europe est constante et est égale à 4.8 millions d'habitants ; ce qui est inacceptable ! En effet, la contradiction vient du fait qu'une telle croissance, absolument constante, semble indépendante de la taille de la population alors que même le simple bon sens permet de comprendre que les populations ont tendance à croître plus (en chiffres absolus) lorsqu'elles deviennent plus grandes.

2. Selon ce même rapport des Nations Unies, la croissance relative de la population de l'Europe était estimé à 0.72% par an, sur la période de 1960 à 2000. **Il est en fait logiquement acceptable qu'un taux de croissance relatif d'une population soit constant pendant une certaine période**.

   Ainsi, si P_0 est la population initiale, après une année elle sera de $P_0 + P_0 \times \frac{0.72}{100}$ de sorte que l'on peut écrire $P_1 = P_0\,(1 + 0.0072)$ et ensuite $P_2 = P_0\,(1.0072)^2$.

   Comme pour le cas d'une capitalisation à intérêts composés, après n années, cette population d'Europe sera égale à :

$$P_n = P_0\,(1.0072)^n = 641 \times 1.0072^{t-1960}$$

   Ainsi $P(t) = 641 \times 1.0072^{t-1960}$ exprime le nombre d'habitants en Europe en l'an $t \in [1960, 2000]$, période durant laquelle le taux de croissance relatif de cette population était supposé constant et égale à 0.72%.

   Il s'agit effectivement d'une fonction croissante étant donné qu'elle est de type exponentielle de base $a = 1.0072 > 1$.

Illustration 40 — *Selon le même document, le taux de croissance annuel de la population du Zimbabwe était estimé à 3.5% durant les années 1970 et 1980.*

1. *Exprimer le nombre d'habitants du Zimbabwe en fonction du temps durant la période précitée.*
2. *Il est connu que cette population du Zimbabwe était de 5 millions d'habitant en 1969. En supposant ce taux relatif toujours constant, calculer cette population en 1989, en 2009 et en 2029.*
3. *A la lumière de vos réponses en 2), partagez-vous l'opinion des experts d'après lequel si ce taux relatif de baisse pas, la population du Zimbabwe va se doubler tous les 20 ans ?*

Pour la loi de croissance exponentielle de la population, nous venons d'obtenir une fonction du genre $P(t) = Aa^t$, avec $a > 1$. Cette formule est appelée loi de croissance naturelle ou encore **loi de Malthus**.

Le taux de croissance par habitant (*per capita*) d'une telle population est défini par $\frac{P'(t)}{P(t)}$ et est donc égal au rapport entre le taux de croissance instantané de la population et la taille de la population.

3. Un modèle de croissance linéaire de la population est inacceptable.

En l'absence d'émigration et d'immigration, le taux de croissance per capita d'une population sera égale à la différence entre les taux de natalité et de mortalité. Ces taux dépendent de multiples facteurs dont la distribution des âges, les ressources disponibles (alimentation, espace de vie), présence des parasites ou même des prédateurs...

Pour cette loi de Malthus de croissance exponentielle, qui est le modèle le plus simple d'évolution d'une population, on suppose que le taux de croissance per capita est constant dans le temps.

En effet, d'une part,$P(t) = A \times e^{t \ln a}$ et d'autre part $P(t) = Aa^t$. Il en résulte que l'on peut écrire :

$$P(t) = A \times e^{t \ln a}$$

Il en résulte que :$P^{'}(t) = A \times \ln a \times e^{t \ln a} = \ln a \times \left(A \times e^{t \ln a}\right) = \ln a \times A \times a^t = \ln a \times (P(t))$

La relation $P^{'}(t) = \ln a \times (P(t))$ implique naturellement que

$$\frac{P^{'}(t)}{P(t)} = \ln a$$

. Ainsi, le taux de croissance per capita vaut $\ln a$.

Une autre caractéristique des fonctions exponentielle de type $P(t) = Aa^t$ avec $a > 1$ est que leur temps de dédoublement est constant.

Le *temps de dédoublement* τ dune telle fonction est défini comme le temps nécessaire pour que sa valeur double.

Pour calculer τ, il suffit donc de résoudre l'équation :

$$P(t + \tau) = 2P(t)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} Aa^{t+\tau} &= 2Aa^t \\ &\Rightarrow a^{t+\tau} = 2a^t \Rightarrow a^t a^\tau = 2a^t \\ &\Rightarrow a^\tau = 2 \\ &\Rightarrow \tau = \log_a 2 = \frac{\ln 2}{\ln a} \end{aligned}$$

En bref, d'après le modèle de croissance exponentielle d'une population donnée, elle est exprimée par $P(t) = Aa^t$ et tant que ce modèle tient debout, une telle population doit doubler tous les $\tau = \frac{\ln 2}{\ln a}$ années.

En revenant à l'exemple du Zimbabwe dont le taux de croissance annuel de la population était estimé à 3.5%, l'évolution de cette population était exprimée par la fonction $P(t) = 5 \times 1.035^{t-1969}$ et d'après la conclusion précédente, cette population devrait doubler tous les $\tau = \frac{\ln 2}{\ln 1.035} \approx 20.14879...$ années. Les affirmations des experts étaient donc évidemment plausibles et même très élémentaires.

Il convient enfin de souligner que dans la réalité la croissance exponentielle d'une population ne peut être un modèle conforme ou acceptable de croissance que pour une durée limitée. Il existe d'autres modèles de croissance concurrents et dans les lignes qui suivent, nous en détaillons deux, caractérisés par l'hypothèse d'une taille maximale de la population.

6.5.2 La croissance d'une population vers une limite supérieure

Si pour des raisons de taille du territoire, de la quantité de ressources disponibles pour en assurer le développement ou d'autre types de contraintes la taille d'une population ne peut pas excéder une limite K, les experts admettent que le taux de croissance d'une telle population sera d'autant plus grand que sa taille sera éloignée de la limité K et sera alors proportionnelle à la différence entre K et sa taille.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= r\,(K-P) \Rightarrow dP = r(K-P)dt \Rightarrow \frac{dP}{K-P} = rdt \\
&\Rightarrow \int \frac{dP}{K-P} = \int rdt \Rightarrow -\ln(K-P) = rt + c \Rightarrow \ln(K-P) = -c - rt \\
&\Rightarrow K - P = e^{-c-rt} = e^{-c}e^{-rt} = Ce^{-rt} \\
&\Rightarrow P(t) = K - Ce^{-rt} = K - Ae^{-rt} \quad \text{en posant la constante} \quad C = A
\end{aligned}$$

En observant la fonction

$$P(t) = K - Ae^{-rt}$$

avec $r > 0$, ainsi obtenue on constante sans difficulté qu'elle possède les propriétés suivantes :

1. Elle est monotone croissante.
   En effet, $P^{'}(t) = \left(K - Ae^{-rt}\right)^{'} = rAe^{-rt} > 0, \quad \forall t \in [0, +\infty[$
2. Elle est concave.
   En effet, $P^{''}(t) = \left(rA^{-rt}\right)^{'} = -r^2Ae^{-rt} <, \quad \forall t \in [0, +\infty[$
3. Son taux de croissance est effectivement proportionnel à la différence entre sa valeur et la limite K.
   En effet $P^{'}(t) = \left(K - Ae^{-rt}\right)^{'} = rAe^{-rt} = r\,(K - P(t))$
4. Comme en plus,
   $$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(K - Ae^{-rt}\right) = K$$
   on en déduit que cette fonction possède la droite $y = K$ comme asymptote horizontale.

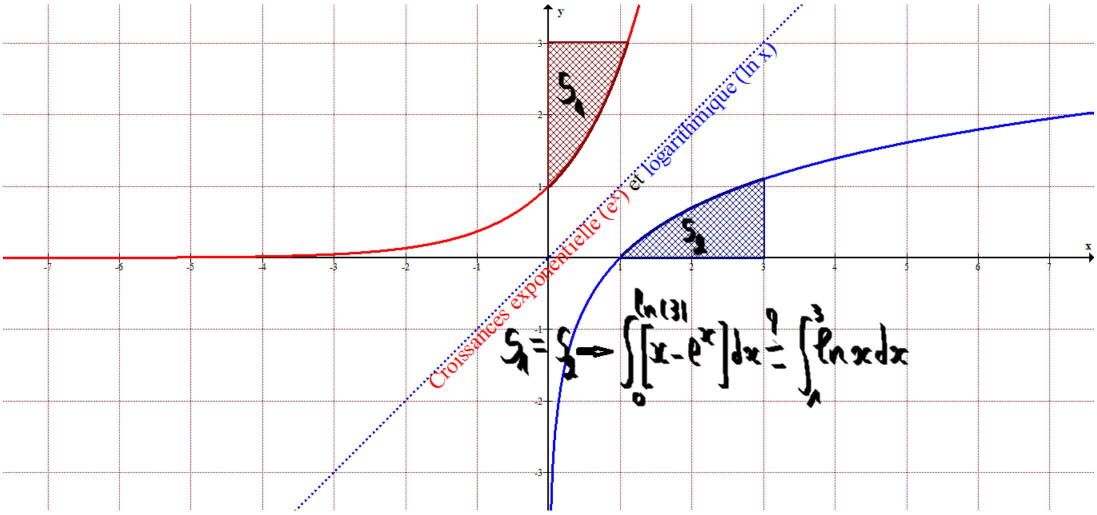
La FIGURE 1 donne, à titre illustratif, la représentation graphique correspondant au cas $P(t) = 15 - 10e^{-0.6t}$ où on *voit* clairement toutes les propriétés citées ci haut.

6.5.3 Croissance logistique d'une population

Le modèle précédent suppose que le taux de croissance $P^{'}(t)$ de la population et le taux de croissance relatif (per capita) $\frac{P^{'}(t)}{P(t)}$ de la population diminuent continuellement lorsque la taille de la population augmente.

Cette hypothèse ne paraît acceptable pas aux yeux de nombreux observateurs surtout lorsque la taille de la population est faible relativement à sa limite supérieure K.

On préfère pour cela un modèle de croissance de la population où le taux de croissance relatif $\frac{P^{'}(t)}{P(t)}$ est approximativement constant c-à-d. que la croissance suit approximativement une loi exponentielle de type



Malthus avec un taux de croissance $P'(t)$ croissant, lorsque la population est faible et où le taux de croissance relatif $\frac{P'(t)}{P(t)}$ converge vers zéro lorsque la taille de la population s'approche de la limite K.

Dans ce cas, on corrige le modèle de Malthus en admettant que le taux de croissance de la population $\frac{dP}{dt}$ est certes proportionnel à la population $P(t)$ mais dans l'expression $\frac{dP}{dt} = cP(t)$ on estime logique que la constante c de proportionnalité n'est plus une constante mais une fonction qui décroît à mesure que la population P augmente.

Il s'agit d'un modèle qui a été proposé par **Pierre François Verhulst** alors qu'il était chargé, semble-t-il, par son professeur **Adolph Quetelet**, d'*étudier un modèle d'évolution de population qui tienne vraiment compte d'un frein dans l'évolution de la population.*

Verhust proposa, pour diverses raisons que la constante c soit une fonction affine décroissante de P et prit donc $c = r\left(1 - \frac{1}{K}P\right)$ avec $r > 0$ et $K > 0$ étant la limite supérieure de la valeur de la population.

Cela conduit alors à l'équation :

$$\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)P \Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{r}{K}(K-P)P$$

Pour chercher la valeur de la fonction P , il suffit de remarquer qu'en arrangeant convenablement les termes (séparation des variables) on obtient :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{r}{K}(K-P) \Rightarrow \int \frac{dP}{P(K-P)} = \int \frac{r}{K}dt + c_0P$$

Pour mieux calculer l'intégrale de gauche $\int \frac{dP}{P(K-P)}$, décomposons la fonction à intégrer en somme d'éléments simples en cherchant A et B tels que :

$$\frac{1}{P(K-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{K-P}$$

IL en résulte que :

$$A(K-P)+BP=1 \Rightarrow (B-A)P+AK=1$$

Ce qui conduit au système :

$$\Rightarrow \begin{cases} B-A=0 \\ AK=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=A \\ A=\frac{1}{K} \end{cases} \Rightarrow A=B=\frac{1}{K}$$

On obtient dans ce cas :

$$\frac{dP}{P(K-P)} = dP\left[\frac{1}{K}\frac{1}{P}+\frac{1}{K}\frac{1}{(K-P)}\right] = \frac{dP}{KP}+\frac{dP}{K(K-P)}$$

Dans ce cas le calcul $\int \frac{dP}{P(K-P)} = \int \frac{r}{K}dt + c_0$ devient :

$$\int \frac{dP}{KP} + \int \frac{dP}{K(K-P)} = \frac{r}{K}t + c_0 \Rightarrow \frac{1}{K}\ln(P) - \frac{1}{K}\ln(K-P) = \frac{r}{K}t + c_0$$

On a :

$$\frac{1}{K}\left[\ln P - \ln(K-P)\right] = \frac{r}{K}t + c_0 \Rightarrow \frac{1}{K}\ln\left(\frac{P}{K-P}\right) = \frac{r}{K}t + c_0 \Rightarrow \ln\left(\frac{P}{K-P}\right) = rt + c_0$$

On ontient :

$$\left(\frac{P}{K-P}\right) = e^{rt+c_0} = e^{c_0}e^{rt} = C_0e^{rt} \quad \text{avec} \quad C_0 = e^{c_0} \Rightarrow \frac{P}{K-P} = C_0e^{rt}$$

Pour expliciter la fonction inconnue, cette dernière relation donne :

$$P = KC_0e^{rt} - PC_0e^{rt} \Rightarrow P\left(1+C_0e^{rt}\right) = KC_0e^{rt}$$

En simplifiant par C_0e^{rt} on obtient :

$$\Rightarrow P = \frac{KC_0e^{rt}}{1+C_0e^{rt}} = \frac{K}{\frac{1}{C_0}e^{-rt}+1}$$

En posant $A = \frac{1}{C_0}$ on obtient en définitive :

$$P(t) = \frac{K}{1+Ae^{-rt}}$$

La fonction $P(t) = \frac{K}{1+Ae^{-rt}}$ est appelée **fonction logistique** [4] et on parle dans ce cas de la *croissance logistique de la population* jusqu'au niveau K.

Il s'agit d'une fonction assez souvent utilisée dans beaucoup de modèles des Sciences sociales et de l'Economie.

La fonction logistique possède les propriétés suivantes :

4. C'est dans sa publication de 1845 que **Verhulst** nomme cette fonction *courbe logistique* sans donner de justification à ce terme. Sa courbe ayant la forme d'un **S** on l'appelle parfois aussi `sigmoïde`

1. elle est croissante.
   En effet,
   $$P^{'}(t) = \left(\frac{K}{1+Ae^{-rt}}\right)^{'} = \frac{ArKe^{-rt}}{(1+Ae^{-rt})^2} > 0, \quad \forall t \in [0, +\infty[$$
2. la fonction logistique possède un point d'inflexion en un point t_i d'abscisse $t_i = \frac{\ln A}{r}$ et d'ordonnée $P(t_i) = \frac{K}{2}$
   En effet,

$$\begin{aligned} P^{''}(t) &= \left(P^{'}(t)\right)^{'} \\ &= \left[Arke^{-rt}\left(1+Ae^{-rt}\right)^{-2}\right]^{'} \\ &= -Ar^2Ke^{-rt}\left(1+Ae^{-rt}\right)^{-2} + Arke^{-rt}\left[-2\left(1+Ae^{-rt}\right)^{-3}\left(-Are^{-rt}\right)\right] \\ &= ArK\left[-re^{-rt}\left(1+Ae^{-rt}\right)^{-2} + 2rAe^{-2rt}\left(1+Ae^{-rt}\right)^{-3}\right] \end{aligned}$$

De la relation
$$P^{''}(t) = ArK\left[-re^{-rt}\left(1+Ae^{-rt}\right)^{-2} + 2rAe^{-2rt}\left(1+Ae^{-rt}\right)^{-3}\right]$$
on déduit que si t_i est l'abscisse du point d'inflexion, alors $P^{''}(t_i) = 0$ et dans ce cas :
$$\left[-re^{-rt_i}\left(1+Ae^{-rt_i}\right)^{-2} + 2rAe^{-2rt_i}\left(1+Ae^{-rt_i}\right)^{-3}\right] = 0$$
Et dans ce cas :
$$-re^{-rt_i}\left(1+Ae^{-rt_i}\right)^{-2} = -2rAe^{-2rt_i}\left(1+Ae^{-rt_i}\right)^{-3}$$
On en déduit que :
$$-\cancel{r}\,\cancel{e}^{-rt_i}\left(1+Ae^{-rt_i}\right)^{-2} = -2\,\cancel{r}Ae^{-\cancel{2}rt_i}\left(1+Ae^{-rt_i}\right)^{-3}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ 1 = 2Ae^{-rt_i}\left(1+Ae^{-rt_i}\right)^{-1} \\ &\Rightarrow\ 1 = \frac{2Ae^{-rt_i}}{1+Ae^{-rt_i}} \\ &\Rightarrow\ \frac{Ae^{-rt_i}}{1+Ae^{-rt_i}} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow\ 2Ae^{-rt_i} = 1 + Ae^{-rt_i} \\ &\Rightarrow\ Ae^{-rt_i} = 1 \Rightarrow e^{-rt_i} = \frac{1}{A} \\ &\Rightarrow\ -rt_i = -\ln A \\ &\Rightarrow\ t_i = \frac{\ln A}{r} \end{aligned}$$

L'ordonnée du point d'inflexion est alors :

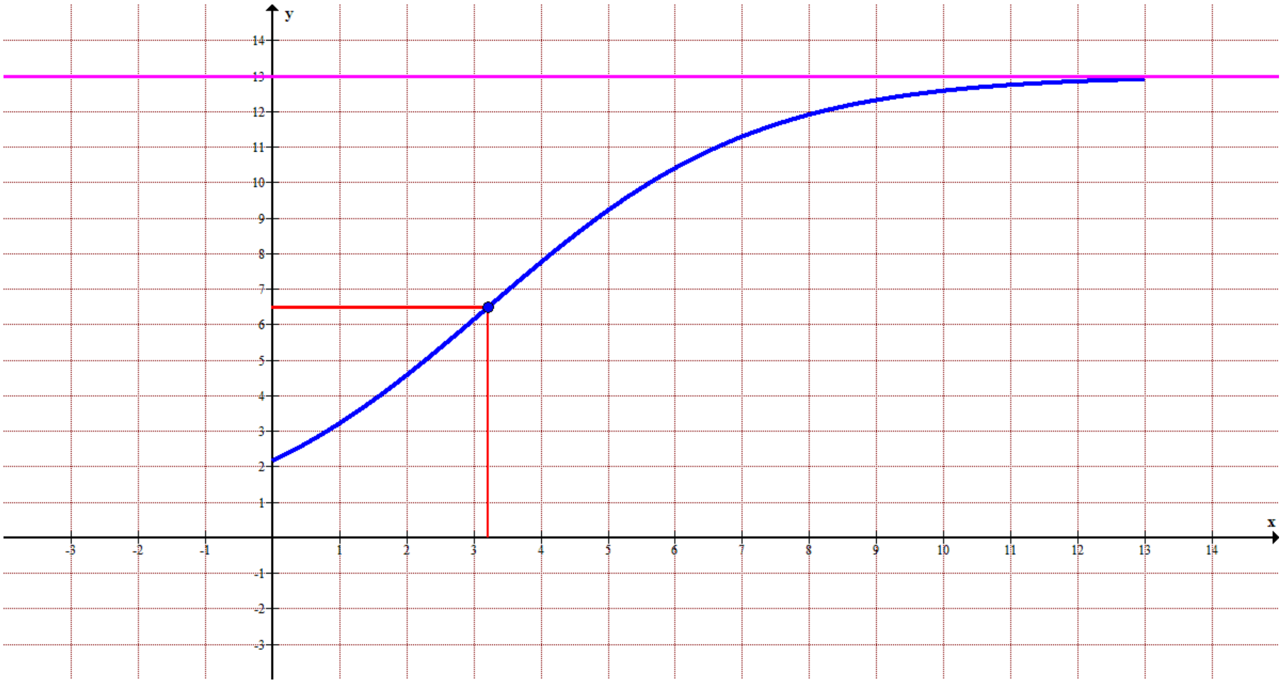
$$P(t_i) = \frac{K}{1+Ae^{-r\frac{\ln A}{r}}} = \frac{K}{1+Ae^{-\ln A}} = \frac{K}{1+Ae^{(\ln\frac{1}{A})}} = \frac{K}{1+A\frac{1}{A}} = \frac{K}{1+1} = \frac{K}{2}$$

Il en résulte que la fonction logistique $P(t) = \frac{K}{1+Ae^{-rt}}$ admet le point

$$\left(\frac{\ln A}{r}, \frac{K}{2}\right)$$

comme point d'inflexion et on montre aussi aisément qu'il s'agit d'une fonction convexe (taux de croissance de la population croissant) en tout $t < t_i = \frac{\ln A}{r}$ et concave (taux de croissance de la population décroissant) pour $t > t_i = \frac{\ln A}{r}$.

En représentant la fonction logistique $P(t) = \frac{13}{1+5e^{-\frac{1}{2}t}}$ on peut *visualiser* sans difficulté toutes les propriétés démontrée ci-haut :



On peut aussi observer les mêmes propriétés pour la fonction logistique $P(t) = \frac{10}{1+5e^{-0.8t}}$ dont le point d'inflexion est $\left(\frac{\ln(5)}{0.8}, 5\right)$.